SAGGIO
DI UN CORSO DI MATEMATICA

PER USO

DELLA REALE SCUOLA
POLITECNICA, E MILITARE

TOM. V.

ANALISI

A DUE COORDINATE

DEL PROFESSORE

FERDINANDO DE LUCA.

NAPOLI 1815.

Nella Stamperia dell' Istituto Politecnico Militare
Diretta da Lodovico Sangiacomo.

Con permesso.

ANALISI
A DUE COORDINATE.

CAPO I.

Nozioni generali; construzioni dell' espressioni di 1.°, e 2.° grado. e dell' equazioni di 2.° grado ad una incognita.

1. La Geometria, e l'Algebra mirano ad uno stess' oggetto, ma con differenti mezzi. La prima diretta a trovare i rapporti delle quantità, della loro genesi, e de' loro siti, ne offre, per lo più col metodo di composizione, de' modelli alla nostra imaginazione; e l' altra con un linguaggio tutto affatto rappresentativo può caratterizzarsi come un idioma destinato ad annunciare le verità matematiche. Quando questo linguaggio è la traduzione di rapporti geometrici, ed all' opposto, quando si esprime in disegno l' enunciazione di alcuni caratteri algebrici, che racchiudono una verità, allora si passa dalla Geometria all' Algebra, e viceversa.

Or la scienza, che insegna questi reciproci passaggi, si chiama *Applicazione dell' Algebra alla Geometria.*

2. Si fa in Ideolgia differenza tra metodo sintetico, ed analitico. Il primo, come ognuno sa, è un metodo di composizione, e l' altro chiamasi metodo di risoluzione. Io qui non discuterò quale dè due metodi sia da preferirsi nell' insegnamento: abbastanza questa questione è stata agitata, e noi

ne rimettiamo i curiosi alla logica di Hobbes, alle opere di Condillac, all' ideologia di Tracy, ed all' erudite, e dotte memorie lette all'oggetto nel nostro consiglio d'istruzione da varj Professori: solo dirò che i matematici hanno con preferenza adottati questi vocaboli per caratterizzare le di loro opere, e che talvolta alcuni ne hanno abusato. La gioventù troppo sollecita a precitare i suoi giudizii può facilmente darsi a credere che basti una figura ed un triangolo *ABC*, o una espressione di *x*, ed *y* per caratterizzare una produzione scritta con metodo sintetico, o analitico, quasichè il metodo sintetico, o l'analitico fosse il risultato del nostro arbitrio a veder piuttosto chiamare *ABC*, che *x*, ed all' opposto una quantità. Egli è vero, che il linguaggio Geometrico usato dagli antichi è di sua natura più sintetico, che analitico, come al contrario l' idioma algebrico tanto grato à moderni geometri veste un aspetto più analitico, che sintetico; ma non è perciò che basta aver una figura, delle rette, degli angoli ec. per dirsi una produzione sintetica; ed al contrario usare i simboli alfabetici per voler presumere di aver usato un linguaggio analitico. Quando le verità matematiche non solo lo sviluppo delle nostre idee; quando si assumono delle verità generali come principj; quando le definizioni, e gli assiomi si fanno precedere ad ogni analisi del nostro spirito, ci vuol altro che adottare tutte le *x*, ed *y* della biblioteca de Tolomei, per voler dare ad una produzione il tuono di produzione analitica. Sono due cose ben distinte l'una dall'altra, usare il metodo analitico, ed adottare i simboli algebrici. L'idea di analisi non può andar disgiunta da quella di una serie d'idee connesse in modo, che una serve di principio all'altra, ed in guisa che le verità si sviluppano una

dall'altra. Quando questo si sarà fatto l' analisi si chiamerà *algebrica*, o *geometrica*, secondochè un tale sviluppo si porterà innanzi col linguaggio Algebrico, o Geometrico.

3. Da quanto abbiamo finora detto egli è agevole il formarsi idee chiare della diversità di questi due linguaggi. Il Geometrico poichè dà in disegno l' espressione di una quantità, dee naturalmente presentare il rapporto delle diverse parti, che unite insieme simboleggiano la formola algebrica; quidi i siti, e la genesi della quantità formano parte di esso.

Al contrario l' idioma algebrico poichè rappresenta le varie parti poste in disegno con de' simboli di convenzione, non può altrimenti esprimerle, che coll' equazioni, o ineguaglianze. Quindi questo linguaggio ci porta al valore delle quantità.

Dunque allora potremo noi tradurre le verità da un linguaggio in un altro; quando ci riesce esprimere in equazione quel rapporto geometrico, ch' esiste tra le grandezze, ed all' opposto quando si ritrova il rapporto geometrico delle quantità poste in equazione. Gli esempj renderanno più chiare queste verità.

4. Si proponga, dato un cerchio FDB, ed un punto A fuori di esso, menata sulla AC, che passa pel centro del cerchio e pel punto A, una retta AE perpendicolare, ritrovare nella circonferenza del cerchio un punto F tale, che sia $FE=AE$. Sia F un tal punto, sarà $FE=EA$; chiamisi quindi EA, x, AC, a, e'l raggio del cerchio, r; poichè è $CE^2=CA^2+AE^2$, sarà in simboli $(r+x)^2=a^2+x^2$, e quindi $x=\frac{a^2-r^2}{2r}$. Alge-

Fig. 1

bricamente questo valore di x ci dimostra, che prendendo $AE = \frac{a^2 - r^2}{2r}$, la retta EC, che unisce il punto E col centro del cerchio determinerà il punto F. Ma per avere geometricamente la quantità $\frac{a^2-r^2}{2r}$ bisogna ritrovare quella retta, la quale sia quarta proporzionale in ordine a $2r$, $a+r$, $a-r$, ossia bisogna esibire il rapporto che alle quantità date serba la grandezza ignota. Quest'operazione, che si fa da' geometri, si dice costruire *un' espressione algebrica*. Così per costruire la n.ª espressione, si rifletta, che poichè si ha $DB = 2r$, $DA = a+r$, basta alzare da B una perpendicolare BM, e tagliare $BM = AB$; allora congiungendo la DME, poichè si ha $DB : DA = BM : AE$, sarà $2r : a+r = a-r : \frac{a^2-r^2}{2r}$: e non resterà a fare, che a descrivere col centro E, e col raggio EA un cerchio, il quale secondochè incontrerà il cerchio DFB in un punto, lo taglierà in due, o non l'incontrerà giammai, ci mostrerà che il problema è capace di una soluzione, di due, o che sarà impossibile.

5. Ecco un altro facilissimo esempio. Adattare nell'angolo retto ADC, il cui lato AD è dato, una retta eguale ad una retta K. Supponiamo M quel punto, che unito col punto A dia $AM = K$: chiamisi AD, a; K, b, e DM, x; si avrà per le condizioni del problema $b^2 = a^2 + x^2$, la quale da $x = \pm\sqrt{(b^2 - a^2)}$. I due valori di x ci mostrano che il problema ammette due soluzioni, secondochè la retta si adatta nell'angolo ADM, o nell'altro ADM'. Vi è ancora il caso, in cui il problema è impossibile, ed è allerch' è $a > b$, che rende

Fig. 2

imaginario il valore di x: infatti allorchè si ha $AD>K$, se si potesse adattare la retta AM, si avrebbe nel triangolo ADM una angolo retto ADM, ed un angolo ottuso AMD. Supponiamo dunque, che sia $b>a$, ed andiamo ad esprimere geometricamente il valore di x avuto dalla soluzione algebrica del problema: è chiaro, che tutto si riduce a ritrovare una media proporzionale tra $b+a$, e $b-a$; quindi prolungata AD d' ambe le parti, si tagli $AG=AG'=K$, sarà $GD=b+a$, e $DG'=b-a$; allora descritto su di GG' un cerchio, i punti M,M', ove questo sogliera la CM', soddisferanno al problema, e le rette DM, DM' avranno ad a e b il rapporto annunciato dall'equazione $x=\sqrt{(b^2-a^2)}$; infatti tanto DM, quanto DM' è media proporzionale tra DG, $G'D$, ossia tra $b+a$, e $b-a$. Questi due esempj sono sufficiente a mostrare a giovani la diversità de' due linguaggi geometrico, ed algebrico; e 'l mezzo di esprimere una equazione algebrica colla geometria, ed all' opposto. Tutto si è ridotto a tradurre in equazione alcuni rapporti di simboli geometrici, ed all' opposto a disegnare in proporzione le quantità algebriche, per ravvisare i rapporti della quantità ignota alle note. Per meglio chiarire queste cose noi andremo di proposito ad occuparsi della costruzione geometrica delle quantità algebriche.

6. E sulle prime, poichè una linea non ha che una sola dimensione, la sua conveniente espressione algebrica non dee esser, che di una delle seguenti forme a, $a+b$, $a-b$, $\frac{ab}{c}$; che anzi, essendo $a=\frac{a.m}{m}$, $a+b=\frac{(a+b).m}{m}$ ec., in cui m indica una

quantità qualunque, l'espressione generale, e conveniente ad una linea retta sarà $\frac{ab}{c}$.

Quindi poichè $\frac{ab}{c}$ sciolta in proporzione da $c : a :: b : \frac{ab}{c}$, ne segue che un' espressione lineare algebrica si costruisce sempre con una quarta proporzionale.

7. Andiamo a mostrar cogli esempj la verità di questa conseguenza. Prima di tutto però bisogna riflettere, che se talvolta una qualunque espressione algebrica lineare manca di qualche fattore per dirsi completa, e conveniente alla sua natura, possiamo supplirlo coll' unità, giacchè nella soluzione algebrica del problema si è sicuramente supposta qualche quantità eguale ad 1. Quindi l'espressione $\frac{a^2bm-ahn}{c^2k-h}$ bisogna esser completata nel seguente modo $\frac{a^2bm-ahn.1}{c^2k-h.1^2}$. Le stesse considerazioni hanno luogo per l'espressioni algebriche, che sorpassano le lineari. Ciò posto sia $\frac{a^2mh-b^2n+pgq}{ef^2-phn}$ che voglia costruirsi. Si prenda uno de' termini del numeratore, per esempio, a^2mh per modello, ed indi si faccia $b^2n=a^2mh'$, $pgq=a^2mh''$, $ef^2=amh'''$, $phn=amh^{iv}$, l'espressione addotta si cambierà in quest' altra $a\left[\frac{h-h'+h''}{h'''-h^{iv}}\right]$, la quale è della forma $\frac{a'b}{c}$, e resterà costruita trovando una quarta porzionale in ordine ad $h'''-h^{iv}$, a, ed $h-h'+h''$;

nel seguente modo, cioè, essendo $h'=\frac{b^2 n}{a^2 m}=\frac{b^2}{a}\cdot\frac{n}{a}\cdot\frac{1}{m}$, si determini essa, ritrovando in ordine ad a, b la terza proporzionale, che chiameremo K; indi in ordine ad a, K, n la quarta proporzionale, che chiameremo Q, e finalmente la quarta proporzionale in ordine ad m, Q, 1: si avrà così una retta che rappresenterà l'espressione h': fatto lo stesso per h'', h''', h^{IV}, si uniscano per diritto le rette h, ed h'', e dalla loro somma se ne tolga h'; quindi tagliata dalla retta h''' una altra eguale ad h^{IV}, si chiami M la retta $h-h'+h''$, ed N l'altra $h'''-h^{IV}$, ed allora l'espressione a costruire sarà $\frac{aM}{N}$, la quale si avrà trovando geometricamente la quarta proporzione in ordine alle rette N, a, M. Si sarebbe egualmente ottenuto la costruzione dell'addotta espressione, e di qualunque altra, trasformando il solo denominatore, per ridurlo ad un monomio, il che conduce a ridurre una espressione algebrica alla somma, e differenza di tanti rotti, cosicchè allora non resta che a costruire questi separatamente. Così nell'addotto esempio, preso ad arbitrio ef^2 per modello, e fatto $phn=eff'$, il denominatore ef^2-phn del rotto proposto si ridurrà ad $ef(f-f')$, o sia ad efM, costruendo $f'=\frac{ph}{e}\cdot\frac{n}{f}$, come si è fatto qui sopra, e chiamando M la quantità $(f-f')$: allora la costruzione del proposto fratto si ridurrà a quelle di $\frac{a^2mh}{efM}$, $\frac{b^2n}{efM}$, $\frac{pgq}{efM}$, i quali costruiti nel modo qui sopra praticato si prenderà la somma

delle rette simboleggiate da $\frac{a^2mh}{efM}$, $\frac{pgq}{efM}$, e da essa se ne toglierà l'altra espressa da $\frac{b^2n}{efM}$: sarà questa la retta risultante.

8. L'espressioni di 2.° grado, rappresentando quantità di due dimensioni, contengono due fattori; quindi esse si costruiscono, dopo averle ridotte alla forma conveniente alla loro natura. Or poichè noi sempre possiamo esibire un rettangolo eguale alla somma, o alla differenza di più quadrati, e viceversa, come dalla Geometria, ne segue che la radice di un'espressione di 2.° grado può esser ridotta a n.° arbitrio ad indicare la radice della somma e della differenza di due quadrati, o la radice del prodotto di due fattori: nel primo caso è il triangolo rettangolo, nel secondo il cerchio, che ci portono alla sua costruzione. Quindi qualunque espressione di 2.° grado può esser ridotta a n.° piacere sotto una delle due forme $\sqrt{(A^2 \pm B^2)}$, $\sqrt{(AB.)}$ Sia infatti da costruirsi la seguente espressione

$$\sqrt{\left[\frac{a^2mh-b^2np+qmc}{de-hn}\right]}.$$

Se si principierà a trasformarla dal numeratore, mettendo $b^2np=a^2mh'$, $qmc=a^2mh''$, $de=ah'''$, $hn=ah^{IV}$, si avrà

$$\sqrt{\left[\frac{am(h-h'+h'')}{h'''-h^{IV}}\right]}=\sqrt{\left[\frac{amP}{Q}\right]},$$

determinando, come si è fatto al di sopra, h', h'', h''', h^{IV}, e facendo $P=h-h'+h''$, e $Q=h'''-h^{IV}$: allora, ritrovata in ordine a Q, a, m la quarta proporzionale, che indicaremo con K, il proposto radicale diverrà $\sqrt{(KP)}$ simile all' altro $\sqrt{(AB)}$,

cosicchè per costruirlo non resta che ritrovare una media proporzionale tra A, e B, ossia sopra una retta A B descrivere un cerchio, ed elevare dal punto intercetto fra A e B una perpendicolare fin all'incontro della circonferenza: sarà questa l'espressione $\sqrt{(AB)}$ in disegno.

Se si fosse trasformato il solo denominatore, come si è fatto al di sopra, facendo $hn=de'$, indi costruendo e', e chiamando D la quantità $e-e'$, il nuovo radicale sarebbe divenuto

$$\sqrt{\left[\frac{a^2mh}{Dd}-\frac{b\,np}{Dd}+\frac{qmc}{Dd}\right]}.$$

Allora si costruiranno separatamente questi fratti nel seguente modo, cioè si feccia $\frac{a^2mh}{Dd}=\frac{a^2}{D}.\frac{m}{d}.h$; indi si ritrovi in ordine a D, ed a la terza proporzionale, che chiameremo A; di poi, ritrovata la quarta proporzionale in ordine di d, A, m, che chiameremo B, il fratto $\frac{a^2nh}{Dd}$ diverrà Bh: in simil modo, costruiti gli altri fratti $\frac{b^3np}{Dd}$, $\frac{qmc}{Dd}$, supponiamo che siano divenuti rispettivamente HP, KQ: con tal riduzione il proposto radicale diverrà $\sqrt{(hB-HP+KQ)}$; allora o tra h, B; H, P; K, Q troveremo delle medie proporzionali, che chiamaremo C, M, N, e'l radicale ridotto diverrà $\sqrt{(C^2-M^2+N^2)}$; o faremo $HP=hB'$, e $KQ=hB''$, e'l il radicale si ridurrà a $\sqrt{h(B-B+B'')}$. Nel primo caso la costruzione si ridurrà a formare prima un triangolo, rettangolo di cui C n'è l'ipotenusa e'l M un catetto, con che determinato l'altro catetto, che chiameremo R, non resterà a costruirsi che $\sqrt{(R^2+N^2)}$, ossia l'ipotenusa di quel triangolo rettangolo, di cui

R, ed N ne sono i cateti; nell' altro caso poi, costruito le quantità B', B'', ed assegnata la retta eguale a $-B'+B''$, che chiameremo L, non ci resterà che a costruire $\sqrt{(hL)}$; ossia a ritrovare una media proporzionale tra h, ed L.

9. La costruzione dell' equazioni di 2.° grado ad una indeterminata non è ora, che una consequenza di quanto abbiamo detto. Infatti ogni equazione di secondo grado ad una inderminata viene compresa nella formola $x^2 \pm px \pm q = 0$, la quale ci da le quattro seguenti conbinazioni $x^2 - px + q = 0$, $x^2 + px + q = 0$, $x^2 + px - q = 0$, $x^2 - px - q = 0$. La prima non differisce dalla seconda, che nel segno delle radici, le quali in quella sono ambidue positive, ed in questa amendue negative, come ci viene indicato da' segni di esse; infatti l'una si trasformerebbe nell' altra, ponendo in essa $-x$ in vece di x: similmente non vi è altra differenza tra la terza, e la quarta, se non che, avendo ambidue le stesse radici, ed una positiva, e l' altra negative, nella terza la negativa è maggiore della positiva, laddove nella quarta la positiva è maggiore della negativa: infatti l' una similmente si cambia nell' altra, ponendo in essa $-x$ in vece di x. Quindi la costruzione dell'equazioni di 2.° grado ad una indeterminata non si riduce, che alla prima, ed alla terza, o alla seconda, ed alla quarta.

Ciò posto passiamo all' effettiva costruzione di esse: Le radici della prima, e seconda sono $x = \pm \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q^2)}$, nella quale le due radici, ove $\frac{1}{2}p$ si trova affetta del segno $+$ appartengono alla prima; e le due altre, ove $\frac{1}{2}p$ si trova affetta del segno $-$ appartengouo alla seconda. L'espressione irrazionale, che fa parte di queste radici, non è che quella del catetto di un triangolo rettangolo, in cui

l'ipotenusa è $\frac{1}{2}p$, ed un catetto è $\sqrt{q}$. Quindi su di una retta $CE=\frac{1}{2}p$ descritto un semicerchio CiE, ed adattata in questo una corda $ED=\sqrt{q}$, Fig 3 si congiunga CD; sarà $CD=\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$; allora prolungata CD d'ambe le parti verso A, e B, si tagli $CA=CB=\frac{1}{2}p$, sarà $AD=\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$, e $BD=\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$. Nell'ipotesi, che AB sia una quantità negativa, sarà $CD=-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$; e quindi $BD=-\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$, $AD=-\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$.

Poicch'è $CE=\frac{1}{2}p$, se col centro C, e col raggio $\frac{1}{2}p$ si descriva un cerchio, questo passerà pe'l punto E; ma è $DE=\sqrt{q}$; dunque resteranno costruite le radici dell'equazione $x^2\pm px+q=0$ descrivendo sopra un diametro $AB=\pm p$ un cerchio; indi menandogli una tangente $BF=\sqrt{q}$, e conducendo dal punto F la FE' parallela ad AB; le perpendicolari ED, $E'D'$, che si abbassano sul diametro da' punti E, E', ove la retta FE incontra la circonferenza circolare, taglieranno i segmenti $BD, D'A$, BD', DA, che saranno le due radici dell'equazioni $x^2\pm px+q=0$, le quali sono ambidue positive, allorchè si ha $x^2-px+q=0$, ed amendue negative, allorchè si rapportano all'equazione $x^2+px+q=0$.

Segue da ciò che secondocchè la retta FE' incontrerà la circonferenza in due punti, in uno, o non l'incontrerà giammai, le due radici dell'equazione $x^2\pm px+q=0$ saranno ambidue reali, e diseguali amendue eguali, amendue imaginarie: or la retta FE' incontrerà la circonforenza del cerchio in due punti in un solo, o non l'incontrerà giammai, secondocchè è $BF<CH$, $BF=CH$, $BF>CH$, ossia $\sqrt{q}<\frac{p}{2}$, $\sqrt{q}=\frac{p}{2}$, $\sqrt{q}>\frac{p}{2}$; dunque son queste le condizioni

perchè l'equazione proposta abbia due radici reali, e diseguali, due radici eguali, o due radici imaginarie. Le radici delle n.e equazione nel primo caso sono $\pm\frac{1}{2}p\pm\sqrt{P}$, nel secondo $\pm\frac{1}{2}p$, e nel terzo $\pm\frac{1}{2}p\pm\sqrt{-P}$, indicando con P la quantità irrazionale.

Fig. 4 10. Veniamo or'a costruire le radici dell'equazione $x^2\pm px-q=0$, ossia l'espressioni $x=\mp\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$. Si costruisca sulle prime il triangolo rettangolo CFA che abbia $CF=\frac{1}{2}p$, e $FA=\sqrt{q}$, sarà $CA=\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$; allora prolungata AC verso B', si tagli $CB=CB'=\frac{1}{2}p$, sarà $AB'=AC+CB'=\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$ ed $AB=AC-CB=\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$; e per l'equazione $x^2+px-q=0$, prendendo AB' negativa, come conviene, la radice positiva sarà $AB=BC-CA=-\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$, e la negativa sarà $AB'=AC+CB'=-\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}$. Quindi, essendo eguali CF, CB, CB', ne segue che resteranno costruite le radici dell' equazione $x^2\pm px-q=0$, descrivendo un cerchio col raggio $\frac{p}{2}$; allora, menata a questo una tangente FA, pe'l punto A, e pe'l centro del cerchio si faccia passare la retta ABB', saranno AB, AB' li due radici di questa equazione, delle quali la maggiore è positiva, è la minore negativa quando l'equazione è $x^2-px-q=0$, ed all' opposto succede, quando si ha $x^2+px-q=0$.

Fig. 3 11. L' equazioni di 2.° grado potrebbero ancora costruirsi, senza esser costretti a sciogliere, ma risolvendole in fattori. Così se l'equazione $x^2-px+q=0$ si metta sotto lo forma $x(p-x)=q$, è chiaro che resterebbe costruita, se nel cerchio AHB fosse $AB=p$, e $BD=x$; allora elevando la perpendicolare DE fino all'incontro della circonferenza, questa sarebbe media proporzionale tra x, e $p-x$, e quindi eguale a q. Dunque all'opposto

se sopra un diametro p si formi un cerchio AHB, cui si meni una tangente $BF=\sqrt{q}$; la parallela FE' segnerà alla circonferenza del cerchio i punti E, E', da' quali, abbassate le perpendicolari ED, $E'D'$ sul diametro, si avranno le due radici BD, BD', o, AD. L'equazione $x^2+px+q=0$ si costruisce nello stesso modo.

12. Similmente costruiremo l' equazione $x^2-px-q=0$ dopo d'averla sciolta ne'due fattori $x(x-p)=q$. Fig. 4

Cioè se si avesse un cerchio descritto sul diametro p, e fosse $AB'=x$, sarebbe $AB=x-p$, e la tangente $AF=\sqrt{q}$; dal che ne segue, che se col diametro p descriveremo con cerchio BFB', menata a questo una tangente FA eguale a $\sqrt{q}$, e facendo passare pe 'l punto A, e pe'l centro una retta ABB', sarà AB' la radice positiva, ed AB la negativa dell' equazione $x^2-px-q=0$, ossia di $x(x-p)=q=0$: infatti preso $AB'=x$, sarà $AB=x-p$, e traducendo in simboli la proprietà del cerchio $AF^2=B'A.AB$ si avrà $q=x(x-p)$. Se si faccia $AB=-x$, si avrà $q=-x(-x+p)$ cioè $q=x(x-p)$. In simil modo potremo con tal metodo costruire le radici dell' equazione $x^2+px-q=0$ o della sua identica $x(x+p)=q$, la quale si riprodurrà facendo $AB=x$, o $AB'=-x$.

13. Premesse tali cose, noi soggiugniamo alcuni problemi geometrici di 1.°, e 2.° grado e per rendere familiare a' giovani il linguaggio geometrico, ed algebrico, e per vieppiù imprimere ne' loro animi il metodo di tradurre un linguaggio nell' altro.

Determinare nella retta nota AC *un punto* B *tale, che sia* AB : BC *in una data ragione di* m : n. Fig. 5

Si chiami x la AB; indicando con a la AC, sarà $BC=a-x$; e per la condizione del pro-

blema si avrà $x : a-x=m : n$, da cui si tira $x = \frac{am}{m+n}$. Sicchè resterà sciolto il problema, adattando al punto A una retta AX indefinita; allora presa $AD=m$, e $DE=n$, si congiunga EC, e dal punto D gli si meni la parallela DB, questa segnerà nella AC il punto B in questione: infatti da questa costruzione si ha $EA : AC = DA : AB$, ossia $m+n : a=m : AB = \frac{am}{m+n}$, ch' è appunto il valore di x avuto dalla soluzione algebrica del problema.

Fig. 6 14. *Prendere nella* AB *un punto* E *tale, che sia il rettangolo di* AE.EB *eguale ad una data quantità.*

Chiamisi AB, a, AE, x; sarà $BE=a-x$; la quantità cui dee esser eguale quel rettangolo sia indicata da P^2; sarà per la condizione del problema $x(a-x)=P^2$, da cui si tira $x^2-ax+P^2=0$, equazione simile a quella, che abbiamo costruita pag. 10 n.° 9.

Fig. 6 15. *Ad una data retta* AB *aggiugnere una parte talchè il rettangolo della somma di tutta la retta e della parte aggiunta per questa stessa porzione aggiunta sia eguale ad una data quantità.*

Chiamisi a la retta AB, e P^2 la quantità, cui dee esser eguale quel rettangolo; sia BT la parte aggiunta, e sia indicata da x; sarà per la condizione del problema $(a+x)x=P^2$, da cui si tira $x^2+ax-P^2=0$, equazione simile a quella, che abbiamo costruita pag. 12 n.° 10.

Fig 7 16. *Menare tra due cerchi concentrici* AGE, BHD *una segante comune, tale però che le corde* AE, BD *siano in data ragione.*

Siano $AE : BD = m : n$; sarà ancora $AC : BC = m : n$, e quindi $AC^2 : BC^2 = m^2 : n^2$.

Chiamisi a il raggio AO, b il raggio BO, ed x la perpendicolare OC, sarà $AC^2 = a^2 - x^2$, e $BC^2 = b^2 - x^2$; si avrà dunque $a^2 - x^2 : b^2 - x^2 = m^2 : n^2$, da cui si tira $x = \sqrt{\left[\frac{m^2b^2 - n^2a^2}{m^2 - n^2}\right]}$. Per costruire un tal valore di x si faccia $n^2a^2 = m^2b'^2$, e si prenda P media proporzionale tra $b + b'$, e $b - b'$, e q media proporzionale tra $m + n$, ed $m - n$; si avrà con ciò $x = \frac{mP}{Q}$: allora presa OF Q, $OK = P$ sulla OR che bisega gli archi, ed $Oi = m$, si unisca FK, e per i si meni iC parallela ad FK; sarà C quel punto, da cui elevando la perpendicolare AE, si avrà $AE : BD = m : n$; infatti da questa costruzione si ha

$$OC = \frac{mP}{Q} = \sqrt{\left[\frac{m^2b^2 - n^2a^2}{m^2 - n^2}\right]},$$

da cui si tira $OC^2(m^2 - n^2) = m^2b^2 - n^2a^2$, ossia

$$(a^2 - OC^2)n^2 = (b^2 - OC^2)m^2$$

che sciolta in proporzione da $a^2 - OC^2 : b^2 - OC^2 = m^2 : n^2$, ossia $AC : BC = m : n$, e quindi $AE : BD = m : n$.

17. *Dato il diametro* AC *di un semicerchio* ABC, *ritrovare nella tangente* CO, *che si eleva dall' estremo* C *del diametro* AC *un punto* O *tale che congiungendolo coll' altro estremo* A *del diametro, sia* OB *eguale ad una data grandezza* Fig. 8

Chiamasi AC, c; OB, a; OA, x; sarà $AB=x-a$ per la condizione del problema; allora, supponendo congiunta BC, ne risulteranno i due triangoli simili ABC, AOC, da' quali si avrà

$AO : AC = AC : AB$, ossia $x : c = c : x-a$,

da cui si tira $x^2-ax-c^2=0$, equazione simile a quella del n.° 10 pag. 12; quindi le sue radici si costruiranno nello stesso modo.

Fig. 9 18. *Date le due corde* AB, EF, *che si tagliano ad angolo retto, e data la distanza* CO *del centro del cerchio al loro punto d'intersezione, determinare il raggio del cerchio.*

S' intendano abbassate dal centro le perpendicolari CH, CG sulle corde AB, EF; chiamisi AH, a; EG, b; CO e, e 'l raggio, x; sarà

$$CH^2=CB^2-BH^2=x^2-a^2;\quad CG^2=CF^2-FG^2=x^2-b^2;$$

ma si ha $CG^2+CH^2=OH^2+CH^2=OC^2$; sicchè sarà ne' simboli $x^2-a^2+x^2-b^2=e^2$, da cui si ha

$x=\sqrt{\left[\frac{a^2+b^2+e^2}{2}\right]}$ valore che si costruirà agevolmente dietro ciocchè si è detto al di sopra.

Fig. 10 19. *Nel triangolo rettangolo* ABD, *dato il catetto* BD, *e la differenza, che vi è tra l' ipotenusa, e l' altro catetto, determinare gli altri lati del triangolo.*

Prolunghiamo la AB verso F, e prendasi BC eguale alla data differenza; chiamisi a la retta BC, sia $AB=x$; allora essendo $AD-AB=a$, o sia $AD-x=a$, sarà $AD=a+x$; la retta BD chiamisi b; quindi per la proprietà del triangolo rettangolo si avrà $a^2+2ax+x^2=x^2+b^2$, da cui si ti-

ra $x=\frac{b^2-a^2}{2a}=\frac{b^2}{2a}-\frac{a}{2}$, e quindi $AD=\frac{b^2}{2a}+\frac{a}{2}$.

Per costruire un tal valore di x, si divida BC per metà in O, e presa $OF=2a$, dal punto O si elevi la perpendicolare $OH=BD$, sarà $AO=\frac{b^2}{2a}$, e quindi $AB=\frac{b^2}{2a}-\frac{a}{2}$, ed $AC=\frac{b^2}{2a}+\frac{a}{2}$: e si costruirà facilmente il triangolo rettangolo ABD, di cui se ne conoscono i lati.

20. *Descrivere un cerchio, che passi per i* Fig. 11 *punti* F, O *dati, e che tocch' insieme la retta* AB *data di sito:*

Si uniscano i punti F, ed O colla retta FO, e divisa la FO per metà in E, dal punto E si alzi la perpendicolare EA, dovrà in questa retta ritrovars' il centro del cerchio, che si domanda (Geom. 107): supponiamo che sia C; da C si abbassi su di AB la perpendicolare CB, sarà B il punto di contatto (Geomet. 122.); si unisca CO. Ciò posto, poichè sono dat' i due punti, F, O, e la retta AB è data di sito rispetto ad essi, saranno note le due FO, EA, e l' incognita sarà CE; chiamisi $FO=2a$, $EA=b$, CE, x; dippiù sarà noto l' angolo EAB, che fanno le due rette AB, AE date di posizione, e quindi essendo anche noto l' angolo retto ABC, il triangolo ABC sarà dato di specie, e quindi sarà data la ragione di $AC:CB$; si esprima questa ragione con $m:n$: allora sarà $CB=\frac{n(b-x)}{m}$, ed essendo $CO=\sqrt{(EC^2+EO^2)}$, si avrà $CO=\sqrt{(x^2+a^2)}$: ma nell' ipotesi, che C sia

 il

centro del cerchio in quistione, CO, CB saranno raggi di essi, e quindi saranno eguali; dunque si avrà l' equazione $\frac{bn-nx}{m}=\sqrt{[x^2+a^2]}$; elevando a quadrato, si avrà
$\frac{b^2n^2-2bn^2x+n^2x^2}{m^2}=a^2+x^2$, la quale ridotta da
$x^2+\frac{2bn^2}{m^2-n^2}x=\frac{b^2n^2-a^2m^2}{m^2-n^2}$. Si faccia $a^2m^2=b^2n'^2$, l' equazione ultima diverrà $x^2+\frac{2bn^2}{m^2-n^2}x=\frac{b^2(n^2-n'^2)}{m^2-n^2}$,
cioè $x^2+\frac{2bnn}{(m+n)(m-n)}x=\frac{bb(n+n')(n-n')}{(m+n)(m-n)}$: allora costruito $n'=\frac{am}{b}$; indi ritrovato dopo $(m+n)$, $2b$, ed n la quarta proporzionale A, e dopo la $(m-n)$, A, ed n la quarta preporzionale B; similmente ritrovata in ordine ad $(m+n)'$, e b la terza preporzionale C, ed in ordine ad $(m-n)$, C ed ad $(n+n')$ la quarta proporzionale D, ed tra D, ed $n-n'$ la media proporzionale E, l'ultima equazione diverrà $x^2+Ax=E^2$ simile a quella, che abbiamo costruita pag. 12. n. 10.

Fig. 12 21. *Data la somma de' lati di un triangolo rettangolo, e l' aja dello stesso, ritrovare i lati* Chiamisi $2s$ la somma de lati del triangolo rettangolo ACB; e b^2 indichi l'aja dello stesso triangolo; chiamisi AB, x; sarà $AC+CB=2s-x$. Ciò posto si ha $AB^2=AC^2+CB^2$ (1); ed essendo $b^2=\frac{AC.CB}{2}$, sarà $4b^2=2AC.CB$.. (2); si sommino l'equazioni (1), e (2), si avrà $AB^2+4b^2=AC^2+2AC$.

$CB+CB^2$, ossia ne' simboli $x^2+4b^2=4s^2-4sx+x^2$, lo quale da $x=\frac{s^2-b^2}{s}$, espressione, che si costruisce agevolmente. Per ritrovare poi gli altri lati, si chiami BC, y; ed AC, z; allora sarà $y+z+\frac{s^2-b^2}{s}=2s$, e quindi $2s-\frac{s^2-b^2}{s}=y+z$: facciasi $2s-\frac{s^2-b^2}{s}=2g$, ed $y-z=2t$; dall' equazione $y+z=2g$, ed $y-z=2t$, si avrà $y=g+t$, e $z=g-t$, e quindi $yz=g^2-t^2$; ma è $yz=BC.CA=2b^2$; dunque sarà $g^2-t^2=2b^2$, da cui si tira $t=\sqrt{(g^2-2b^2)}$, quantità, che sostituita nè valori di $y=g+t$, e di $z=g-t$, da $y=g+\sqrt{(g^2-2b^2)}$, e $z=t-\sqrt{(g^2-2b^2)}$, espressioni che si costruiscono facilmente: allora avendo i tre lati del triangolo in quistione, si potrà anche costruire il triangolo, come dalla geometria piana.

22. *Dato il perimetro di un triangolo* ACB *qualunque, un angolo* C, *e la perpendicolare* CD, *che si abbassa dal vertice dell' angolo dato sul lato opposto, determinare il triangolo.* Fig. 13

Chiamiamo x il lato AB opposto all' angolo dato C; sia p il perimetro dato, sarà $AC+CB=p-x$; supponiamo che sia $AC-CB=y$; si avrà

$$AC=\frac{p-x+y}{2}, \text{ e } CB=\frac{p-x-y}{2}.$$

Per ritrovare il valore di x, ricorriamo alla proprietà de' triangoli (Geometr. 80, 82); quindi supponendo dal vertice dell' angolo ignoto A ab-

bassata la perpendicolare AE; per avere in simboli l' equazione

$$AB^2=AC^2+BC^2\pm 2BC-CE \;.\;.\;.\;.\; (1)$$

fa d' uopo determinare CE in funzione di p, x, y: a tal effetto si formi all' estremo F della retta $GF=p$ l' angolo GFP eguale all' angolo dato C, e del punto G si abbassi su di FP prolungata la perpendicolare GI; il triangolo GFI sarà dato di specie (Geometr. 203), e di grandezza (Geometr. 48) : sia $FI=g$, ed $IG=f$: allora saranno simili i due triangoli GFI, CAE, e si avrà $GF : FI=AC : CE$, e mettendo i simboli

$$p : g=\frac{p-x+y}{2} : CE=\frac{gp-gx+gy}{2p};$$

quindi traducendo in simboli l'equazione (1), e riducendo si avrà

$$x^2=\frac{p^2-2px+x^2+2py-2xy+y^2}{4}$$

$$+\frac{p^2-2px+x^2-2py+2xy+y^2}{4}\pm\frac{gp^2-2gpx+gx^2+gy^2}{2p},$$

e liberando da fratti, i termini in y, ed xy si distruggeranno per l' opposizione de'segni; quindi ordinando rispetto ad y, contraendo, e riducendo, con dividere anche tutta l' equazione per 2, si avrà

$$\frac{(p\mp g)x^2+(2p^2\pm 2gp)x\mp p^2g}{p\mp g}=y^2 \ldots (2).$$

Ciò posto per la simiglianza de' due triangoli

AEB, CDB, si ha $CB : CD = BA : AE$, ossia chiamando a la data perpendicolare CD e mettendo i simboli, si avrà

$$\frac{p-x-y}{2} : a = x : AE = \frac{2ax}{p-x-y};$$

ma per la simiglianza de' due triangoli
FGI, CAE è $FG : GI = CA : AE$,
ossia ne' simboli

$$p : f := \frac{p-x+y}{2} : AE = \frac{pf-fx+fy}{2p};$$

sicchè ragguagliando i due valori di AE, si avrà l' equazione $\frac{2ax}{p-x-y} = \frac{pf-fx+fy}{2p}$, e liberando da fratti, si distruggeranno i termini in y, ed xy per l' opposizione de' segni; quindi ordinando rispetto ad y, si avrà

$$y^2 = \frac{fx^2-(2pf+4ap)x+p^2f}{f},$$

e paragonando questa equazione con (2), avremo

$$\frac{(p\mp g)x^2+(2p^2\pm 2gp)x^1\mp p^2g}{p\mp g}$$
$$= \frac{fx^2-[2pf+4ap]x+p^2f}{f}:$$

liberando da fratti, i termini in x^2 si distrugge-

ranno, e ritrovando allora il valore di x si avrà $x=\frac{p^2f}{2pf+2ap\mp 2ag}$, espressione, in cui il segno $-$ posto innanzi $2ag$ si rapporta al triangolo ottusangolo e'l segno $+$ al triangolo acutangolo. E se l'angolo ACB fosse retto, si avrà $g=0$, ed $f=p$, per la ragione, che l'angolo GFI dovrebbe in tal caso esser retto, per cui sarà $x=\frac{p^2}{2p+2a}$ identica all' espressione ottenuta da Newton nell' aritmetica universale, in cui esamina il solo caso dell'angolo retto: essa ci da il teorema rilevato da Newton, cioè *che in ogni triangolo rettangolo è la somma de' suoi lati, e dalla perpendicolare alla somma de' lati, come la metà di questa somma è alla base.*

Se si fa $ap=fp'$, $\mp ag=\mp fp''$, ed indi si prenda una quantità eguale a $p+p'\mp p''$, che disegnaremo con P, l'espressione di x si ridurrà a $\frac{P^2}{2P}$, che si costruirà facilmente ritrovando una terza proporzionale in ordine a $2P$, e p.

Fig. 14 23. *Di un triangolo* AEC *dato l'angolo in* E, *la base* AC, *e la somma degli altri lati, e della perpendicolare* EB, *cioè* AE + EC + EB, *determinare il triangolo.*

Sia $AE+EC+EB=m$, $AC=b$, ed $EB=x$; sarà $EC+AE=m-x$; facciasi $EC=y$; sarà $EC=\frac{m-x+y}{2}$ ed $AE=\frac{m-x-y}{2}$. Ciò posto s'intenda del vertice C di uno degli angoli ignoti abbassata su di EA

la perpendicolare CD: sarà dato di specie il triangolo ECD, in cui oltre dell' angolo D retto si conosce l' angolo in E; quindi sarà data la ragione de' suoi lati; sia $m : n = CE$, ED; mettendo i simboli, si avrà $m : n = \frac{m-x+y}{2} : ED = \frac{mn-nx+ny}{2m}$: or per essere $AC^2 = EC^2 + EA^2 - 2AE.ED$, si ha $AC^2 + 2AE.ED = EC^2 + EA^2$; dunque sostituendo i simboli, sarà

$$b^2 + (m-x-y)\frac{(mn-nx+nx)}{2m} = \left(\frac{m-x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-x-y}{2}\right)^2$$

ossia, sviluppando, e riducendo, si avrà

$$y^2 = \frac{(n-m)x^2 + (2m^2 - 2mn)x - m^3 + 2mb^2 + m^2 n}{m+n} \ldots (1).$$

Dippiù la simiglianza de' triangoli AEB, ADC ci da $AE : EB = AC : CD$, e mettendo i simboli:

$$\frac{m-x-y}{2} : x = b : CD = \frac{2bx}{m-x-y} \ldots (2)$$

dippiù essendo dato di specie il triangolo CED, come si è detto, sarà data la ragione di $EC : CD$; esprimasi con quella di $m : p$, sarà

$$m : p :: = \frac{m-x+y}{2} : CD = \frac{mp-px+py}{2m} \ldots (3),$$

e quindi paragonata l' equazione (2) con (3), si avrà $\frac{2bx}{m-x-y} = \frac{mp-px+py}{2m}$; liberando da fratti, ri-

ducendo, ed ordinando rispetto ad y, si avrà $y^2 = \frac{px^2-(2mp+4bm)x+m^2p}{p}$, la quale paragonata con (1) da

$$\frac{(n-m)x^2+(2m^2-2mn)x-m^3+2mb^2+m^2n}{m+n}=$$

$\frac{px^2-(2mp+4bm)x+m^2p}{p}$; quest' ultima si liberi da fratto, e si ordini per x, ne risulterà $x^2-\frac{(2mp+2mb+2bn)}{p}x-(m^2-b^2)=$ o simile a quella, che abbiamo costruita (10.). Allorchè l' angolo in E è ottuso la quantità $2bn$, che forma parte del coefficiente di x, diviene $-2bn$. Finalmente, allorchè l' angolo in E è retto si ha $n=o$, e $p=m$, per cui l' equazione ultima diviene $x^2-(2m+2b)x-(m^2-b^2)=$ o, da cui si tira $x=m+b\pm\sqrt{(2mb+2b^2)}$ simile a quella ottenuta da Newton nel probl. V. del cap. 2. Sez. IV. in cui non considera, che il solo caso dell' angolo retto.

CAPO II.

Nozione sul metodo delle due coordinate. Applicazione dello stesso alla linea retta.

24. Un punto E su di un piano sarà determinato, se saranno date le sue distanze EO, EC Fig. 15 ossia, AC, CE da due assi fissi AY, AX. Le due rette AC, CE, che determinano il punto E si chiamano *coordinate* al punto E, e gli assi AX, AY, su quali queste coordinate si prendono, si chiamano *assi delle coordinate*. Il punto A poi, da cui cominciano a contarsi le coordinate, si chiama *l'origine delle coordinate*. Quindi, chiamando AC, p, CE, q le due equazioni di condizioni, che determinano il punto E, sono $AC=p$, $CE=q$. Noi dinotaremo perciò il punto E col simbolo (p, q).

Se la EC diviene zero, il punto E cadrà in C, e si troverà sulla AX, e se EO diviene zero, il punto E cadrà in O, e si troverà sulla AY; e se si ha insieme $EC=o$, $EO=o$, il punto E si confonderà coll'origine. Dunque fatto $EC=y$ ed $EO=x$ — $y=o$ racchiude la condizione, perchè il punto E si trovi sull'asse AX; $x=o$ è l'equazione a' punti presi sull'asse AY; ed $y=o$, $x=o$ sono l'equazioni appartenenti insieme all'origine A.

25. Rapportiamo varj punti E, K, G... alle coordinate AX, AY: egli è chiaro che come variano le AC, AH, AF, così variano le CE, HK, FG... : allora i punti E, K, G... di una linea resteranno determinati, se conosceremo le coordinate rispettive a ciascheduno di essi. Riuniamoli sotto una stessa condizione, e supponiamo, che $y=fx$ esprima il sistema di tutti questi punti: l'equazione $y=fx$ rinchiuderà allora tutte le con-

dizioni, perchè questi possano soddisfarla, cosicchè dando ad x successivamente diversi valori AC, AH, AF, verranno ad esser determinate le corrispondenti CE, HK, FG..., i cui estremi formeranno il sistema di tutti gl' infiniti punti soddisfacenti all' equazione $y=fx$.

L' equazione $y=fx$, la quale costruisce tutti quegl' infiniti punti, a proporzione, che x, e quindi y acquista diversi valori, dicesi *locale* della linea, che passa per tutti quei punti, e questa linea chiamasi *luogo geometrico* de' punti, la cui situazione viene segnata dall' equazione $y=fx$.

Segue da ciò ch' e *chiamasi equazione ad una linea considerata su di un piano, quella, che tra due indeterminate x, ed y, rinchiude tutte le condizioni, perchè possa rappresentare il sistema degl' infiniti punti di essa.*

Dunque le coordinate hanno tal nesso tra loro, che basta conoscerne una, perchè l' altra resti determinata. La parola coordinata esprime infatti questo reciproco rapporto. In particolare però, poicchè le BC, KH..., che dagl' infiniti punti della linea BC si menano su di AX parallelamente all' asse AY, tagliano continuamente sulla AY le rette AC, AH..., queste rette sono state chiamate *ascisse*, e le EC, HK... *ordinate* corrispondenti a ciaschedun' ascissa: allora l' asse AX chiamasi *asse delle ascisse*, e l' altro AY *asse delle ordinate*.

26. Principiamo da ciocchè vi ha di più semplice, considerando in primo luogo le due indeterminata x, y elevate, a prima potenza; allora la più generale equazione di primo grado sarà $Ay=Bx+C$, ove vi sono le indeterminate y, x, il termine costante C, ed i coefficienti A, B;

che determinano la posizione della linea caratterizzata da questa equazione, come vedremo in seguito. Facciamo $\frac{B}{A}=a$, $\frac{C}{A}=b$, e l'equazione $Ay=Bx+C$ diverrà $y=ax+b$, la quale dà $\frac{x}{y-b}=\frac{1}{a}$..(1): facciamo sulle prime $b=o$, si avrà $y=ax$, ed $\frac{x}{y}=\frac{1}{a}$... (2). Tanto l'equazione (1), quanto l'altra (2) ci danno la prima $x : y-b=1 : a$, e la seconda $x : y :: 1 : a$.

Segue da ciò, che il luogo geometrico, dell'equazione $Ay=Bx+C$ ha tale proprietà, che le coordinate ad un punto qualunque di esso sono in un rapporto costante.

Dunque il luogo geometrico dell'equazione $Ay=Bx+C$ è una linea retta (geom. pian.).

Quindi affinchè due o più punti (p, q), (p', q') (p'', q'') siano in linea retta, bisogna che vi sia luogo alla condizione $\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}=\frac{p''}{q''}$...

27. Andiamo a dimostrare di una maniera diretta che l'equazione della linea retta è della forma $y=ax+b$ ed a determinare insieme il coefficiente a, e la quantità costante b nell'equazione $y=ax+b$. Chiamiamo s la retta AG': allora bisogna avvertire, che per dinotare gli angoli $G'AX$, $G'AE$, XAY fatti rispettivamente dalla retta coll'asse delle ascisse, e delle ordinate, e da due assi faremo uso della seguente notazione, cioè pe 'l primo $ang\,(s, y)$, pel secondo $ang\,(s, x)$, e pe'l terzo $ang\,(x, y)$. Ciò posto prese a' vari punti della retta AG' le coordinate AC, CE, AH, HK..., non si dee fare, dietro ciò [illegible]

che abbiamo detto (26), ch'esprimere algebricamente il rapporto delle coordinate AC, CE', AH, HK'...; ma è $\frac{AC}{CE'}=\frac{AH}{HK'}$..., come dalla geometria; dunque basta prendere il rapporto delle coordinate ad un punto E'; e quindi poicchè si ha $AC : CE' = \text{sen}(\varepsilon, y) : \text{sen}(\varepsilon, x)$, mettendo x, ed y in luogo di AC, CE', si avrà $y=\frac{\text{sen}(\varepsilon, x)}{\text{sen}(\varepsilon, y)}x$... (2') Se la retta ε taglia l'asse AY in un punto B diverso da A, allora chiamandola ε', e menata BF' parallela ad AX, l'ordinata per questa nuova origine B sarà $C'E=CE-AB$, cioè la y si cambierà in $y-AB$, e l'equazione (2') diverrà $y-AB=\frac{\text{sen}(\varepsilon', x)}{\text{sen}(\varepsilon', y)}x$, ossia $y=\frac{\text{sen}(\varepsilon', x)}{\text{sen}(\varepsilon', y)}x+AB$. Paragoniamo ora quest'equazione coll'equazione $y=ax+b$; esse saranno simili, e si sarà $\frac{\text{sen}(\varepsilon', x)}{\text{sen}(\varepsilon', y)}=a$; $AB=b$.

Segue da ciò 1.° che il coefficiente a è il rapporto de' seni degli angoli, che una retta fa coll'asse delle coordinate, e la quantità costante b è la distanza dell'origine A ad una nuova origine B; 2.° che quindi l'equazione di una retta, che passa per l'origine è $y=ax$, e quella di un'altra retta che taglia in due punti diversi gli assi delle coordinate è $y=a'x+b$; facendo $\frac{\text{sen}(\varepsilon', x)}{\text{sen}(\varepsilon', y)}=a'$; 3.° finalmente che due condizioni a, e b si richiedono per determinare la posizione di una retta su di un piano riguardo a due assi, delle quali è in no-

stro arbitrio disporre per assoggettare la retta a quelle condizioni, che più ci piacciono.

Quindi per ritrovare l'equazione ed una retta BG, non si dee che prendere ad un punto qualunque E di essa le due coordinate BC', $C'E$ a contare dal punto B, ov'essa taglia l'assse delle ordinate, e chiamata AB, b, $C'E$, x, risolvere il triangolo $BC'E$, cioè esprimere trigonometricamente il rapporto delle coordinate BC', $C'E$.

28. Se la retta BG è parallela all' altra AG', si avrà allora ang(ϵ', x)=ang(ϵ, x), ed ang.(ϵ, y)= ang.(ϵ', y'), e sarà

$$\frac{\text{sen.}(\epsilon', x)}{\text{sen.}(\epsilon', y)} = \frac{\text{sen.}(\epsilon, x)}{\text{sen.}(\epsilon, y)}.$$

Quindi la condizione, affinchè due rette siano parallele è $a=a'$. Dunque se vogliamo che la retta caratterizzata dall' equazione $y=a'x+b'$ sia parallela all' altra $y=ax+b$, non dobbiamo, che cambiare a' in a, e si avrà per la parallela richiesta $y=ax+b'$.

Poichè ang.(ϵ, x) è l' angolo che fa la retta ϵ coll' asse delle ascisse, ed ang.(ϵ, y) è l' angolo ch' essa fa col l' asse delle ordinate; ma si ha ang.(ϵ, x)+ang.(ϵ, y)=ang.(x, y), e quindi ang.(ϵ, y)=ang.(x, y)−ang.(ϵ, x) dunque si avrà

$$\frac{\text{sen.}(\epsilon, x)}{\text{sen.}(\epsilon, y)} = \frac{\text{sen.}(\epsilon, x)}{\text{sen.}[(x,y)-(\epsilon, x)]}.$$

Segue da ciò, che se un' equazione alla linea retta sia della forma $y=\frac{\text{sen}\varphi}{\text{sen}\theta}x+b$, o dell' altra $y=\frac{\text{sen}\varphi}{\text{sen}(\theta-\varphi)}x+b$, nel primo caso φ sarà l'angolo della retta coll'asse delle ascisse, θ quel-

lo della retta coll' asse delle coordinate, e $\varphi+\theta$ l' angolo delle coordinate; e nel secondo φ sarà l' angolo della retta coll' asse delle ascisse, $\theta-\varphi$ quello della medesima retta coll' asse delle ordinate, e θ sarà l' angolo delle coordinate.

Queste riflessioni servono per agevolare a' giovani il modo di costruire l' equazioni di primo grado tra due indeterminate x, y, allorchè non si fa uso della notazione da noi adottata per esprimere il coefficiente a.

29. Se l' angolo (x, y) fosse retto, ossia se la retta si rapportasse a degli assi rettangolari; allora poicchè ang(ε', x), ang(ε', y) sono gli angoli acuti di un triangolo rettangolo, il cui angolo retto è ang(x, y), si avrà sen(ε', y)=cos(ε', x), e l' equazione alla linea retta diverrà

$$y=\frac{\text{sen}(\varepsilon', x)}{\cos(\varepsilon', x)}x+b\text{, ossia } y=\text{tang.}(\varepsilon', x)x+b$$

Dunque in tal caso il coefficiente a rappresenta la tangente dell' angolo che la retta fa coll' asse delle ascisse.

30. Indicato il modo di ritrovare l'equazione di una retta data di posizione riguardo a due assi; passiamo a risolvere il problema inverso, cioè *data un' equazione di primo grado tra due indeterminate* x, y, *ritrovare la posizione della retta, cui questa equazione appartiene.*

Sia dunque data l' equazione $y=ax+b$: riportiamola sotto la formola generale $Ay=Bx+C$. Allora stabiliti due assi inclinati fra loro sotto un angolo, che sia la somma di quelli, cui appartengono i seni A, B, come si è osservato al di sopra, si faccia $B=0$, per determinare il punto, ove la retta incontra l' asse delle y, si avrà $y=\frac{C}{A}$, e fatta $A=0$

si avrà $x=-\frac{C}{B}$. Quindi prendendo le ascisse positive da A verso X, e le negative da A verso X', e prendendo parimente le ordinate positive da A verso Y, e le negative da A verso Y', si tagli $AB=\frac{C}{A}$, ed $AM=\frac{C}{B}$, e per i punti M, B si faccia passare la retta MBG; sarà questa la retta, cui appartiene l' equazione $Ay=Bx+C$. Infatti, prese ad un punto qualunque P di questa retta le coordinate AN, NP, poicchè si ha $\frac{MN}{NP}=\frac{MA}{AB}$, si avrà ne' simboli $\frac{C}{B}+x=\frac{C}{B}:\frac{C}{A}=\frac{A}{B}$, da cui si tira $C+Bx=Ay$,

y

che è la stessa equazione costruita.

Se l' equazione è della forma $Ay+Bx=C$, allora, poicchè facendo $A=0$, si ha $x=\frac{C}{B}$, e facendo $B=0$, si ha $y=\frac{C}{A}$, la retta, cui essa appartiene, taglierà tanto l' asse delle x, quanto quello delle y dalla parte positiva, e prenderà la situazione HS. Se poi l' equazione è $Ay=Bx-C$, si avrà $y=-\frac{C}{A}$, ed $x=\frac{C}{B}$; ed allora la retta, cui essa appartiene, taglierà l' asse delle y dalla parte negativa, e l' asse delle x dalla parte positiva, cioè prenderà la situazione TF. Finalmente se l' equazione è della forma $Ay=-Bx-C$, poicchè si ha $y=-\frac{C}{A}$, ed $x=-\frac{C}{A}$, la retta, cui ses a appartiene, prenderà la posizione TM, ta-

gliando l' asse delle ascisse, e quello delle ordinate ambi dalla parte negativa.

Segue da ciò, ch' è facile il costruire un' equazione tra x, y e costanti, riducendola prima sotto una delle forme $Ay+Bx+C=0$, $Ay+Bx-C=0$, $Ay-Bx+C=0$, $Ay-Bx-C=0$. Così l' equazione $ay+bx+c=cy-hx+g+e$ si ridurrà sotto una di quelle forme, facendo $a-c=A$, $b+h=\pm B$, $c-g-e=\pm C$.

31. Mettiamo l'equazione $Ay=\pm Bx\pm C$ sotto la forma $y=\pm\frac{Bx\pm C}{A}$, e supponiamo $A=0$, si avrà $y=\frac{\pm Bx\pm C}{0}$; ma l'ipotesi di $A=0$ da $\pm x=\mp\frac{C}{B}$ e quindi $\pm Bx\pm C=0$; dunque y diverrà in questa ipotesi $\frac{0}{0}$, ch' è l' espressione di una quantità indeterminata, e poicchè x è sempre la medesima $\frac{C}{B}$, ne segue che tra l' asse delle y, e la retta vi sarà sempre la medesima distanza $\frac{C}{B}$ menata parallelamente all' asse delle x, cioè la retta in questa ipotesi diverrà parallela all' asse delle y come la MR. Che se noi supponiamo $B=0$, allora l' equazione sudetta posta sotto la forma $x=\frac{\pm Ay\mp C}{B}$ darà $x=\frac{\pm Ay+C}{0}$; ma in tal ipotesi si ha $\pm y=\pm\frac{C}{A}$, e quindi $\pm Ay\mp C=0$; dunque x diverrà parimente $\frac{0}{0}$, e la retta diverrà parallela all' asse delle x nella distanza di una quantità $\frac{C}{A}$ tal' è la retta QF'. Dunque nell'

equazione $Ay=\pm Bx\pm C$, $\pm x=\mp\frac{C}{B}$, che si ha al porre $A=0$, è l'equazione di una retta parallela all' asse delle y, e $\pm y=\pm\frac{C}{A}$, che deriva da $B=0$, è l' equazione di condizione perchè una retta sia parallela all' asse delle ascisse.

Applichiamo queste verità alla soluzione di qualche problema.

32. *Ritrovare l'equazione di una retta condizionata a passare per due punti dati.*

Poichè a, b sono le condizioni, che caratterizzano l'equazione della linea retta, come si è detto; dobbiamo esprimere queste due quantità per le condizioni del problema. Quindi chiamando $m, n; m', n'$ le coordinate a' punti dati, e sostituendo successivamente queste coordinate in luogo delle coordinate variabili x, y nell'equazione $y=ax+b$ (1) si avranno le due altre $n=am+b$ (2) $n'=am'+b$ (3). Per innestare insieme queste condizioni; da (1) si sottragga la (2), si avrà $y-n=a(x-m)$, e trovato per mezzo della (2), e (3) il valore di $a=\frac{n-n'}{m-m'}$ si sostituisca nell'equazione $y-n=a(x-m)$, e l'equazione $y-n=\frac{n-n'}{m-m'}(x-m)$ . . . . . (4) sarà quella che si cercava, e presentata sotto aspetto simmetrico.

Se nell' equazione $y-n=\frac{n-n'}{m-m'}(x-m)$ si passi n al secondo membro, ed indi si facciano le debite riduzioni, si avrà

$$y=\frac{n-n'}{m-m'}x+\frac{n'm-m'n}{m-m'} \quad \ldots\ldots\ (5),$$

equazione, che si sarebbe parimente ottenuta, combinando l' equazioni (2), e (3) per determinare i valori di a, b in funzione di m, n; m', n' e sostituendo questi valori nell'equazione $y=ax+b$. L'equazione (4) essendo più simmetrica della (5), benchè ad essa identica, merita su di questa la preferenza.

33. Se nell'equazione $y-n=\frac{n-n'}{m-m'}(x-m)$ facciamo $m'=0$, $n'=0$, vi rimarrà la sola condizione, che la retta deve passare pe 'l punto (m, n); ma in tal ipotesi si ha $y-n=\frac{n}{m}(x-m)$: dunque questa è l' equazione di una retta condizionata a passare per un sol punto (m,n). In fatti l'equazione $n=am+b$ ci da $a=\frac{n-b}{m}$, ch'è il rapporto costante delle coordinate, e che quindi possiamo esprimere con $\frac{n}{m}$ (26), e dippiù ci dà $b=n-am=n-\frac{n}{m}m$, valori, che sostituiti nell' equazione $y=ax+b$, la cambiano in quest' altra $y=\frac{n}{m}x+n-\frac{n}{m}m$, ossia $y-n=\frac{n}{m}(x-m)$.

34. Quindi data una retta per mezzo della sua equazione $y=ax+b$, se vogliamo che $y=a'x+b'$ esprima l' equazione di un altra retta parallela alla prima e condizionata a passare per un punto (m, n), in virtù della prima condizione bisogna cambiare a', in a, ed indi innestandovisi la

seconda condizione, si avrà $y-n=a(x-m)$, in cui a indica il rapporto delle coordinate $\frac{n}{m}$.

35. Dippiù, se vogliamo avere l' espressione della distanza di due punti E, G determinati rispettivamente dalle coordinate (m, n), (m', n'); menata da E la retta ET parallela all' asse delle ascisse, il triangolo ETG ci darà l' espressione della distanza cercata in funzione delle coordinate a questi punti. Infatti si ha $EG=\sqrt{[ET^2+TG^2\pm 2ETG\cos GTE]}$, ossia ne' simboli $EG=\sqrt{[(m'-m)^2+(n'-n)^2\pm 2(m'-m)(n'-n)\cos[(m'-m),(n'-n)]}$: allorchè l' angolo ETG è retto, ossia le coordinate sono ortogonali, $\cos[(m'-m),(n'-n)]=0$, e quindi si ha $EG=\sqrt{[(m'-m)^2+(n'-n)^2]}$ la quale come più semplice dell' altra, merita la preferenza.

56. *Date l' equazioni di due rette, determinare il di loro punto d' incontro, quando esse non siano parallele.*

Siano $y=ax+b$, $y=a'x+b'$ l' equazioni date: egli è chiaro, che poicchè il punto d' incontro è comune alle due rette, le coordinate a questo punto debbono essere eguali; quindi l' equazione $a'x+b'=ax+b$, è l' equazione di condizione per determinare le coordinate al punto d' incontro; questa equazione ci da $x=\frac{b-b'}{a'-a}$, valore che sostituito in una dell' equazioni date p. e. in $y=ax+b$, ci da $y=\frac{a'b-ab'}{a'-a}$, e sono queste le due coordinate al punto d' incontro, cosicchè costruendole sugli assi delle coordinate, cui si rapportano le due rette date, il loro punto d' incontro sarà l' intersezione di esse. I valori di x,

ed y ci mostrano che il punto in quistione è tanto più lontano dall' origine degli assi, quanto più a' tende a divenire eguale ad a, e quando $a=a'$, non vi è punto d' incontro. Infatti in tal ipotesi le rette caratterizzate dall' equazioni $y=ax+b$, $y=a'x+b'$ sono parallele, come abbiamo osservato al di sopra (28).

Questo metodo è generale, e si può anche applicare a determinare le intersezioni delle curve su di un piano.

37. Il problema precedente ci manuduce a quest' altro, cioè determinare dall' equazioni di due rette, che s' incontrano, l' angolo, ch' esse fanno tra loro. Le due rette siano disegnate da ε, ε'; sarà ang.(ε, x) l' angolo della prima retta coll' asse delle ascisse, ed ang(ε', x) l' angolo dell' altra retta collo stesso asse delle ascisse. Ciò posto l' angolo richiesto o sarà la differenza de' due angoli (ε, x), (ε', x), o sarà eguale alla loro somma: nel primo caso sarà $\text{tang}(\varepsilon, \varepsilon')=\dfrac{\text{tang}(\varepsilon, x)-\text{tang}(\varepsilon', x)}{1+\text{tang}(\varepsilon, x)\text{tang}(\varepsilon', x)}$, e nel secondo si avrà

$$\text{tang}(\varepsilon, \varepsilon')=\frac{\text{tang}(\varepsilon, x)+\text{tang}(\varepsilon', x)}{1-\text{tang}(\varepsilon, x)\,\text{tang}(\varepsilon', x)}$$

espressioni note: resterà perciò determinato l' angolo $(\varepsilon, \varepsilon')$.

Se l' angolo $(\varepsilon, \varepsilon')$ fosse retto, dovrebbe essere $\text{tang}(\varepsilon, \varepsilon')=\infty$, e quindi $1\pm\text{tang}(\varepsilon, x)\text{tang}(\varepsilon', x)=0$; ed è questa la condizione che debbono avere le tangenti degli angoli, che fanno due rette coll' asse delle ascisse, affinchè queste siano perpendicolari.

38. Quindi poichè l' equazione

$$1\pm\text{tang}(\varepsilon, x)\text{tang}(\varepsilon', x)=0$$

da $\tang(\epsilon, x) = \mp \frac{1}{\tang(\epsilon', x)}$, e similmente $\tang(\epsilon', x) = \mp \frac{1}{\tang(\epsilon, x)}$, ma $\frac{1}{\tang(\epsilon', x)}$, ed $\frac{1}{\tang(\epsilon, x)}$ sono le rispettive cotangenti degli angoli (ϵ', x), (ϵ, x) (*Trig.* 11): dunque affinchè un' equazione $y = ax + b'$ rappresenti la perpendicolare alla retta, che ha per equazione $y = \tang(\epsilon, x)x + b$, bisogna fare $a = \pm \frac{1}{\tang(\epsilon, x)}$, ed allora l' equazione richiesta sarà $y = \pm \frac{1}{\tang(\epsilon, x)} x + b'$.

39. Dunque se $y = a'x + b'$ dee riunire le condizioni di una retta perpendicolare ad un' altra, la cui equazione è $y = ax + b$, e che nel tempo stesso debba passare per un dato punto (m, n), in virtù della prima condizione bisogna cambiare a' in $\frac{1}{a}$, e combinandovi la seconda condizione, la risultante sarà $y - n = \pm \frac{1}{a}(x - m)$.

40. Da queste cose ne tiriamo la soluzione del seguente problema. *Determinare la lunghezza della perpendicolare, che si mena ad una retta da un punto dato* (m, n).

L' espressione che si domanda dee risultare dalle due condizioni richieste nel problema: quindi sia $y = ax + b$ l' equazione della retta data, ed $y - n = a'(x - m)$ quella della perpendicolare; sulle prime a' si cambierà in $\pm \frac{1}{a}$ (dando il segno $\pm$ come conviene), e si avrà $y - n = \pm \frac{1}{a}(x - m)$. Queste

rette dovendosi incontrare nel punto, ove cade il piede alla perpendicolare, in questo punto avranno le medesime coordinate; quindi si avrà $ax+b=n-\frac{1}{a}(x-m)$, e quindi, liberando da fratti $(a^2+1)x=an-ab+m$, d'onde si tira $x=\frac{an-ab+m}{a^2+1}$, ed $x-m=\frac{an-ab-a^2m}{a^2+1}=\frac{a(n-b-am)}{a^2+1}$; mettiamo Questo valore di $x-m$ nell' equazione $y-n=\pm\frac{1}{a}(x-m)$, e si avrà $y-n=\pm\frac{(n-b-am)}{a^2+1}$. questi valori di $y-n$, ed $x-m$ sostituiti nell' espressione $\sqrt{[(y-n)^2+(x-m)^2]}$, ch' è quella della distanza di due punti (38), si avrà

$$\sqrt{\left[\frac{(n-b-am)^2+a^2(n-b-am)^2}{(a^2+1)^2}\right]}=$$

$$\sqrt{\left[\frac{(a^2+1)(n-b-am)^2}{(a^2+1)^2}\right]}=\frac{n-b-am}{\sqrt{[a^2+1]}},$$

e sarà questa l'espressione della perpendicolare menata dal punto (m, n) sulla retta, che ha per equazione $y=ax+b$.

Fig. 16

41. Chiamiamo $(m', n')(m'', n'')$ le coordinate rettangolari a' punti R, S, rispettivamente l'equazione della retta RS sarà

$y=\frac{n''-n'}{m''-m'}x+\frac{m''n'-m'n''}{m''-m'}$, la quale paragonata coll'equazione generale $y=ax+b$, da $a=\frac{n''-n'}{m''-m'}$, e $b=\frac{m''n'-m'n''}{m''-m'}$: allora la lunghezza della per-

pendicolare AB, che passa pel punto A, ove si ha $m=o$, ed $n=o$, sarà $\frac{-b}{\sqrt{[1+a^2]}}$ (a), ossia, sostituendo i valori di a, b essa sarà

$$\frac{\frac{m'n''-m'n'}{m''-m'}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{n''-n'}{m''-m'}\right)^2\right]}}=\frac{m'n''-m''n'}{\sqrt{[(m''-m')^2+(n''+n')]}},$$

ed essendo $RS=\sqrt{[(m''-m')^2+(n''-n')^2]}$ (35), sarà l'aja del triangolo

$$ARS=\frac{AB.\,RS}{2}=\frac{m'n''-m''n'}{2},$$

ch' è l' espressione dell' aja di un triangolo, che ha il suo vertice all' origine delle coordinate, in funzione delle coordinate a' vertici degli angoli adjacendi alla base.

(a) Ecco un' altra soluzione elegante dello stesso problema fatta dall'Allievo Signor Scarambone (fig. 16). Sia il triangolo $RS'S$ rapportato a due coordinate rettangolari: si prolunghi la SS' finchè incontra in un punto A l' asse delle ascisse, e 'l punto A prendasi per origine delle coordinate: si abbassi sull' asse AX la perpendicolare RQ, e si chiamino m, n le coordinate AQ, QR al vertice R del triangolo SRS'. Ciò posto il triangolo rettangolo $RS'P$ dà $RP=RS'$. sen$RS'P=(RQ-QS')$sen$AS'Q=(RQ-QS')$cos$S'AQ$: sia $QS'=n'$, si ha $RP=(n-n')$cos$S'AQ$; ma è $n'=am+b$, e cos$S'AQ=\frac{1}{\sec S'AQ}$ (Trig. 11) $=\frac{1}{\sqrt{(1+a^2)}}$ (Trig. 11); dunque con tali sostituzioni, si avrà in fine $RP=\frac{n-am-b}{\sqrt{(1+a^2)}}$: che se il vertice R del triangolo si pianti all' origine A essendo in tal caso $m=o$, ed $n=o$ l'espressione di AB diverrà $\frac{-b}{\sqrt{(1+a^2)}}$: quest' espressioni sono identiche a quelle ottenute qui sopra: in quest' ultima sostituendo per a e b i valori che si hanno dal paragone dell' equazione $n'=am+b$, ed $n'=\frac{n''-n'}{m''-m'}x+\frac{m''n'-m'n''}{m''-m'}$ e si avrà l' aja di $ARS=\frac{m'n''-m''n'}{2}$

Ciò posto chiamiamo a, a', a'' i lati AR, AS, RS, si avrà

$$a^2=m'^2+n'^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

$$a'^2=m''^2+n''^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2),$$

$$a''^2=m''^2-2m''m'+m'^2+n''^2-2n''n'+n'^2 \ldots (3).$$

Dalla somma di (1), e (2) si sottragga la (3), si avrà $a^2+a'^2-a''^2=2(m'm''+n'n'')$; e quindi

$$m'm''+n'n''=\frac{a^2+a'^2-a''^2}{2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$: Allora

dal prodotto di (1) e (2) si sottragga il quadrato di (4), ne verrà

$$m'^2n''^2-2m''n'm'n''+n'^2m''^2=a^2a'^2-\frac{(a^2+a'^2-a''^2)^2}{4},$$

ossia

$m'n''-n'm''=\frac{1}{2}\sqrt{[4a^2a'^2-(a^2+a'^2-a''^2)^2]}$, e poicchè abbiamo dimostrato essere l' aja del triangolo ARS eguale ad $\frac{m'n''-m''n'}{2}$, essa sarà parimente eguale ad $\frac{1}{4}\sqrt{[4a^2a'^2-(a+a'^2-a''^2)^2]}$, ed è questa l'aja di un triangolo in funzione de' suoi lati. Per presentarne l' espressione sotto una forma simmetrica, bisogna riflettere, ch' essendo $4a^2a'^2-(a^2+a'^2-a''^2)^2$ la differenza di due quadrati, possiamo metterla sotto di questa forma

$$[2aa'+(a^2+a'^2-a''^2)(2aa'-(a^2+a'^2-a''^2)]=$$

$$(2aa'+a^2+a'^2-a''^2)(2aa'-a^2-a'^2+a''^2)=$$

$$[(a+a')^2-a''^2)][-(a-a')^2+a''^2)]=$$

$$(a+a'+a'')(a+a'-a'')(a+a''-a')(a''+a'-a),$$

e chiamando S l' aja del triangolo, si avrà per conseguenza

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+a'+a'')(a+a'-a'')(a+a''-a')(a''+a'-a)]}:$$

ma si ha $(a+a'-a'')=(a+a'+a'')-2a''$

$(a+a''-a')=(a+a'+a'')-2a'$

$(a''+a'-a)=(a+a'+a'')-2a$: Dunque chiamando $2p$ la quantità $(a+a'+a'')$, ch'è l'intero perimetro del triangolo, si avrà

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{[2p.2(p-a).2(p-a').2(p-a'')]}=$$
$$\sqrt{[p\ (p-a).(p-a').(p-a'')]},$$

formola elegantissima, e simmetrica da cui ne conchiuderemo, che l'aja *di un triangolo è espressa dalla radice quadrata di un prodotto di cui il primo termine è la semisomma de' tre lati, e gli altri tre termini sono rispettivamente la differenza della stessa semisomma da ciascheduno de' lati del triangolo.* Noi quì l'abbiamo rilevata col metodo delle due coordinate: i metodi ordinarj dell'algebra portano allo stesso risultato, come si può vedere nel corso di matematica redatto per ordine del General Bellavene *pag. 290.* Lacroix *application de l'Algebre a la Geometrie 3.ª edizione pag. 76.*

CAPO III.

Trasformazione delle coordinate.

42. Se i punti C di una curva rapportati primieramente agli assi delle coordinate $A'X'$, $A'Y'$, si vogliamo inseguito rapportare a due altri assi $A'V$, $A'Z$, che abbiano, riguardo a' primi, un dato sito, bisogna esprimere analiticamente questi cambiamenti. Riflettiamo, che se il punto C venisse determinato primieramente dalle coordinate

T. II F. 1 fig. 2

$A'N$, NC, e volesse in seguito riferirsi a due altre coordinate $A'O$, OC prese su due assi $A'V$, $A'Z$ diversi da' primi, prendendo al punto C le nuove coordinate AO, OC, e menando le rette QP, OM rispettivamente parallele a' primi assi $A'X'$, $A'Y'$, le due nuove coordinate $A'O$, OC essendo lati di triangoli, ne' quali gli altri due lati sono presi sulle coordinate primitive, verrebbero ad esser determinate, mercè le condizioni, che ci offrono questi triangoli. Or si sa dalla trigonometria, che ne' triangoli, i lati, che si domandano, non possono ch' esprimersi in funzione degli angoli, e de' lati noti; dunque il punto C verrà rapportato alle nuove coordinate AO, OC, quando nell' equazione, che appartiene alla linea, su cui esso si trova, tra le coordinate AN, NC, esprimeremo queste in funzione delle nuove coordinate, dell' angolo delle coordinate $A'X'$, $A'Y'$, e dagli angoli OAM, $A'OM$; COP, OCP, che sono gli angoli opposti alle coordinate primitive, e che rispettivamente le nuove coordinate fanno colle prime.

L' operazione, mercè la quale le due coordinate, ossia, le variabili di una equazione si esprimono in funzione di due nuove variabili, e degli angoli rispettivi, che queste fanno colle prime, si chiama *trasformazione di coordinate*. Vediamo come questa si esegue, per tirarne le formole, onde trasformare un equazione da un sistema di coordinate ad un altro.

T.II.F.1 n. 1 e 2. 43. Supponiamo in primo luogo, che da un sistema di coordinate qualunque $A'X'$, $A'Y'$ si vogliano ottener le formole per passare ad un altro sistema $A'V$, $A'Z$ dato di sito rispetto al primo, e che con esso ha la medesima origine. Prendiamo perciò, a tenor di ciocchè si è detto,

ad un punto C della linea, sulla quale un tal punto si trova le coordinate $A'N$, NC, $A'O$, OC, e menate da O le rette OP, OM rispettivamente parallele ad $A'X'$, $A'Y'$, si chiamino $A'N$, x, NC, y; $A'O$, x', OC, y'. Ciò fatto il triangolo $A'MO$ ci da le due seguenti analogie

$$\text{sen}(x,y) : \text{sen}(x',y) = x' : A'M = \frac{\text{sen}(x',y)}{\text{sen}(x,y)} x' \ldots (1)$$

$$\text{sen}(x,y) : \text{sen}(x',x) = x' : MO = \frac{\text{sen}(x',x)}{\text{sen}(x,y)} x' \ldots (2)$$

dippiù l'altro triangolo COP ci da le due analogie

$$\text{sen}(x,y) : \text{sen}(y',y) = y' : OP = \frac{\text{sen}(y',y)}{\text{sen}(x,y)} y' \ldots (3)$$

$$\text{sen}(x,y) : \text{sen}(y',x) = y' : CP = \frac{\text{sen}(y',x)}{\text{sen}(x,y)} y' \ldots (4)$$

or si ha $A'N = A'M + OP$, ed $NC = MO + PC$, dunque prendendo per la prima l' espressioni di (1), e (3), e per la seconda quelle di (2), e (4), si avrà

$$x = \frac{\text{sen}(x',y)}{\text{sen}(x,y)} x' + \frac{\text{sen}(y',y)}{\text{sen}(x,y)} y', \text{ ed}$$

$$y = \frac{\text{sen}(x',x)}{\text{sen}(x,y)} x' + \frac{\text{sen}(y',x)}{\text{sen}(x,y)} y';$$

questi valori di x, y sostituiti nell' equazione della linea tra le coordinate x, y, ci condurranno ad una trasformata in x', y', che sarà dello stesso grado, e la linea sarà rapportata a queste nuove coordinate inclinate tra loro sotto l' angolo $(x', y') = \text{ang}(y', x) \pm \text{ang}(x', x)$, in cui il segno $-$ ha luogo, quando la retta $A'V$ cade dentro dell' angolo $Y'A'X'$, e' l segno $+$ quando questa cade fuori di un tal angolo.

44. Se essendo A l' origine del primitivo sistema, fosse A' quello del secondo, allora, chiamando le coordinate AB, BA' alla nuova origine, a, b, ed essendo $AF=AB+A'N$, ed $FC=BA'+NC$, si avrà

$$x=\frac{\text{sen}(x', y)}{\text{sen}(x, y)}x'+\frac{\text{sen}(y', y)}{\text{sen}(x, y)}y'+a \ \ldots . \ (A), \text{ ed}$$

$$y=\frac{\text{sen}(x', x)}{\text{sen}(x, y)}x'+\frac{\text{sen}(y', x)}{\text{sen}(x, y)}y'+b \ldots (B), \text{ formole}$$

che servono per trasformare un equazione da un sistema di coordinate qualunque x, y ad un altro sistema x', y', che ha un origine diversa dal primitivo sistema.

Se si fa $x'=o$, proprietà che appartiene a' punti presi sull' asse delle y', si avrà

$$x=\frac{\text{sen}(y, y')}{\text{ssn}(x, y)}y'+a, \text{ ed } y=\frac{\text{sen}(y', x)}{\text{sen}(x, y)}y'+b,$$

ormole che si otterrebbero direttamente risolvendo il triangolo $A'RZ$, giacchè in tal ipotesi $A'O$ diviene zero, la retta OC va a confondersi colla $A'Z$, e quindi il punto C va a cadere sull' asse $A'Z$ delle y'.

Similmente se si fa $y'=o$ l' equazioni (A) e (B) diverranno rispettivamente

$$x=\frac{\text{sen}(x', y)}{\text{sen}(x, y)}x'+a, \text{ ed } y=\frac{\text{sen}(x', x)}{\text{sen}(x, y)}x'+b,$$

come si avrebbe ancora, risolvendo il triangolo $A'MO$, giacchè in tal ipotesi il punto C va a cadere sul punto O preso sull' asse delle x'.

45. Se essendo A l' origine del primo sistema AX, AY, si voglia passare ad un secondo siste-

ma $A'X'$, $A'Y'$ parallelo al primo, allora l' asse delle x' si confonderà con quello delle x, e l' asse y' con quello delle y, e si avrà
sen$(x', x)=0$, sen$(y', x)=$sen(y, x), sen(x', y) $=$sen(x, y), e sen$(y', y)=0$, valori che sostituiti nell' equazioni (A), e (B), le cambieranno in queste altre $x=x'+a$, $y=y'+b$, le quali sono le formole per trasformare un' equazione da un sistema di coordinate x, y ad un altro sistema x', y' parallelo al primo. Infatti è $AF=AB+A'N$, ed $FC=BA'+NC$, ossia $x=x'+a$, ed $y=y'+b$.

46. Se il primitivo sistema è rettangolare, allora sarà retto l' angolo (x, y), l' angolo (x', x) sarà complemento dell' angolo (x', y), come lo sarà parimente l' angolo (y', y) dell' angolo (y', x): quindi si avrà sen$(x, y)=1$ (*Trig.* 17), sen(x', y) $=$cos(x', x), e viceversa, e sen$(y', y)=$cos(y', x) ed all' opposto (*Trig.* 6) cosicchè fattane la sostituzione nell' equazioni (A), (B), esse diverranno rispettivamente F. 1 n. 3

$$x=\cos(x', x)x'+\cos(y', x)y'+a \ldots (A'), \text{ ed}$$

$$y=\text{sen}(x', x)x'+\text{sen}(y', x)y'+b \ldots (B'), \text{ e queste}$$

sono le formole per passare da un sistema di coordinate rettangolari ad un obbliquo. Esse si avrebbero potuto ritrovar direttamente risolvendo i due triangoli $A'MO$, OPC

La supposizione di $x'=0$ fa rapportar la linea alle coordinate $A'Z$, $A'X$, e la sopposizione di $y'=0$ la fa rapportare alle coordinate $A'V$, $A'X'$; nel primo caso si ha $x=\cos(y', x).y'+a$, ed $y=$sen$(y', x).y'+b$, come si avrebbe direttamente dal triangolo $A'RZ$; e nel secondo si ha $x=\cos(x', x).x'+a$, ed $y=$sen$(x', x).x'+b$, come si avrebbe direttamente risolvendo il triangolo $A'MO$.

47. Supponiamo che anche il secondo sistema,

senz' esser parallelo al primo, sia rettangolare, come $Z'A'V$, indicando allora col simbolo D l'angolo retto, sarà $Z'A'X'=Z'A'V+VA'X'$, ossia $\text{ang}(y', x)=D+\text{ang}(x', x)$, e quindi $\text{sen}(y', x)=\cos(x', x)$ (*Trig.* 21 1.^{a} *delle form.* A), e $\cos(y', x)=-\text{sen}(x', x)$ (*Trig.* 21 2.^{a} *della form.* A), valori, che sostituiti nelle formole (A'), (B'), le cambieranno nelle altre

$$x=\cos(x', x).x'-\text{sen}(x', x)y'+a, \text{ ed}$$

$$y=\text{sen}(x', x).x'+\cos(x', x).y'+b,$$

le quali servono a trasformare un' Equazione da un sistema di coordinate rettangolari ad un altro sistema parimente rettangolare cambiando origine, e se l'origine non si trasporta, a, b divengono nulli.

48. Poichè $x=\cos(x', x).x'+\cos(y', x).y'+a$, ed $y=\text{sen}(x', x).x'+\text{sen}(y', x)y'+b$ servono per aver la trasformata da un sistema di coordinate rettangolari x, y ad un sistema di coordinate obblique; ne segue, che se all' opposto coll' ajuto di queste due equazioni noi cerchiamo di rilevare i valori di x', y' in funzione di x, ed y, le formole, che se ne otterranno, saranno quelle che possono farci ottenere una trasformata da un sistema di coordinate obblique ad un rettangolare:
Per ottenere le dette formole l'equazione

$$x=\cos(x', x).x'+\cos(y', x).y'+a$$

si moltiplichi per $\text{sen}(y', x)$, e dal prodotto si sottragga dall' altra $y=\text{sen}(x', x).x'+\text{sen}(y', x).y'+b$ moltiplicata per $\cos(y', x)$; riunendo in un sol termine i fattori di $\text{sen}(y', x)$, e $\cos(y', x)$, si avrà $x'=\dfrac{(x-a)\text{sen}(y', x)-(y-b)\cos(y', x)}{\text{sen}[(y', x)-(x', x)]}$: e se

dall' equazione $y=\text{sen}(x', x).x'+\text{sen}(y', x).y'+b$ moltiplicata per $\cos(x', x)$ si sottragga l'altra $x=\cos(x', x).x'+\cos(y', x).y'+b$ moltiplicata per $\text{sen}(x', x)$, riuniti in un sol termine i fattori di $\text{sen}(x', x)$, e $\cos(x', x)$, si avrà

$$y'=\frac{(y-b)\cos(x', x)-(x-a)\text{sen}(x', x)}{\text{sen}[(y', x)\mp(x', x)]},$$

e saranno queste le formole per passare da un sistema di coordinate rettangolari x, y ad un sistema di coordinate oblique, cambiando origine.

Quindi, fatto $a=o$, $b=o$, le formole risultanti
$$x'=\frac{x\text{sen}(y', x)-y\cos(y', x)}{\text{sen}[(y', x)\mp(x', x)]}$$
$$y'=\frac{y\cos(x', x)-x\text{sen}(x', x)}{\text{sen}[(y', x)\mp(x', x')]}$$
serviranno per eseguire l'indicata trasformazione, allorchè si da à due sistemi la medesima origine.

49. Le trasformazioni fatte finora le abbiamo ottenute rapportando gli stessi punti di una linea a diversi sistemi di coordinate, e rilevando le coordinate di un sistema in funzione di quelle dell' altro, e degli angoli, che fissavano la posizione de' due sistemi. In queste trasformazioni l'angolo delle coordinate è costante. Se ora facciamo variare un tal angolo, e fissiamo le posizione di un punto M mercè la distanza MA dall'origine, e dell'angolo MAD, in tal caso possiamo prendere per coordinate à diversi punti M, M', M'' ec. di una curva rispettivamente le variabili AM, e l'angolo MAD, AM', e l'angolo $M'AD$, AM'', e l'angolo $M''AD$. Allora, chiamando x, y le coordinate rettangolari AD, DM, ed R il raggio vettore si sarà

Fig. 2

$1 : \cos(R, x) = R : AD = R\cos(R, x)$, ed

$1 : \text{sen}(R, x) = R : MD = R\text{sen}(R, x)$.

Quando i punti di una linea si fissano mercè la loro distanza dall' origine , e l' angolo che questa fa coll' asse delle ascisse, la linea dicesi rapportata *alle coordinate polari*, e l' origine A dicesi *polo*. Dunque le formole per passare da un sistema di coordinate rettangolari ad un sistema di coordinate polari sono

$$x = R\cos(R, x), \; y = R\text{sen}(R, x).$$

Le formole $x = R\cos(R, x)$, ed $y = R\text{sen}(R, x)$ ci danno $\cos(R, x) = \frac{x}{R}$, e $\text{sen}(R, x) = \frac{y}{R}$; ma è $R = \sqrt{(x^2 + y^2)}$; dunque si avrà $\cos(R, x) = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$ e $\text{sen}(R, x) = \frac{y}{\sqrt{(x^2+x^2)}}$, colle quali formole si otterrà la trasformata da un sistema di coordinate polari ad un sistema di coordinate rettangolari x, y.

50. Noi abbiamo fatto dipendere tutte le formole, per ottenere le diverse trasformate da un sistema di coordinate in un altro, da quelle (A), (B). Per averle sotto un colpo d' occhio le riuniamo in un quadro.

$$\text{I.} \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\text{sen}(x', y)}{\text{sen}(x, y)} x' + \frac{\text{sen}(y', y)}{\text{sen}(x, y)} y' + a \\ y &= \frac{\text{sen}(x', x)}{\text{sen}(x, y)} x' + \frac{\text{sen}(y', x)}{\text{sen}(x, y)} y' + b \end{aligned} \right.$$

Formole per passare da un sistema di coordinate oblique x, y ad un altro parimente obbliquo x', y'.

$$\text{II.} \left\{ \begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b \end{aligned} \right.$$

Formole, nelle quali si cambiano le precedenti facendo $\text{sen}(x', x) = o$, $\text{sen}(y', y) = o$, $\text{sen}(x', y) = \text{sen}(x, y)$, $\text{sen}(y', x) = \text{sen}(x, y)$, e che quindi servono per ottenere le trasformate da un sistema qualunque ad un altro parallelo.

$$\text{III.}\ \left\{\begin{array}{l} x=\cos(x',\ x).x'+ \\ \cos(y',\ x).y'+a \\ y=\text{sen}(x',\ x).x'+ \\ \text{sen}(y',\ x).y'+b \end{array}\right\}$$

Formole, nelle quali si cambiano le prime; facendo $\text{sen}(x, y)=1$, $\text{sen}(x', y)=\cos(x', x)$, e $\text{sen}(y', y)=\cos(y', x)$, e che quindi servono per ottenere la trasformata da un sistema rettangolare ad un obbliquo.

$$\text{IV.}\ \left\{\begin{array}{l} x=\cos(x',\ x).x'- \\ \text{sen}(x',\ x).y'+a \\ y=\text{sen}(x',\ x).x'+ \\ \cos(x',\ x).y'+b \end{array}\right\}$$

Formole, nelle quali si cambiano le prececedenti (III) facendo $\text{sen}(y', x)=\cos(x', x)$, e $\cos(y', x)=-\text{sen}(x', x)$, e che quindi servono per ottenere la trasformata da un sistema di coordinate rettangolare ad un altro parimente rettangolare.

$$\text{V.}\ \left\{\begin{array}{l} x'=\dfrac{(x-a)\text{sen}(y',\ x)-(y-b)\cos(y',\ x)}{\text{sen}[(y',\ x),\ (x',\ x)]} \\ y'=\dfrac{(y-b)\cos(x',\ x)-(x-a)\text{sen}(x',\ x)}{\text{sen}[(y',\ x),\ (x',\ x)]} \end{array}\right\}$$

Formole che dipendono da quelle, (III), e che servono ad ottenere la trasformata da un sistema di coordinate oblique ad un rettangolare.

$$\text{VI.}\ \left\{\begin{array}{l} x=R\cos(R\ ,x) \\ y=R\text{sen}(R\ ,x) \end{array}\right\}$$

Formole per passare da un sistema di coordinate rettangolari ad un sistema di coordinate polari.

$$\text{VII.}\ \left\{\begin{array}{l} \cos(R\ ,x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \text{sen}(R,x)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right\}$$

Formole, che dipendono dalle precedenti, e che servono per trasformare da un sistema di coordinate polari ad un sistema di coordinate rettangolari.

CAPO IV.

Uso di queste formole per la discussione dell' equazione generale di 2.° grado a due variabili.

51. Noi andiamo ad applicare le formole quì sopra ottenute per discutere, e semplificare l'equazione generale delle linee di secondo grado, ossia delle curve di 1.° genere nella quale le variabili si trovano elevate a 2.ª potenza. Ecco il problema, che ci proporremo. *Quale è il sistema degli infiniti punti, che possono esser costruiti da un' equazione quadratica tra due indeterminate?* Secondo questa idea noi analizzaremo le linee di 2.° grado al pari di quel che abbiamo fatto per la linea retta, considerandole cioè come lo sviluppo di un' Equazione. Questa maniera di considerar le linee per mezzo delle diloro equazioni ognun comprende quando sia più analitica, ed estesa: le linee così vengono tutte ad esser considerate sotto un punto di veduta generalissima, e le proprietà, che loro appartengono, vengono ad esser tratte dal seno della di loro indole, piuttostocchè dalla loro genesi, la quale non offre de' metodi generali, e riguarda più l'arbitrio del geometra, che la natura di esse.

52. Sulle prime l'equazione la più generale tra due determinate non può, che contenere i quadrati di esse, il prodotto delle medesime, le stesse variabili elevate a prima potenza, ed una quantità costante: essa dunque non può esser che dalla seguente forma

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex-F=0 \quad \ldots \quad (1):$$

i coefficienti A, B, C, D, E, ed F sono quantità costanti, le quali debbono darci le condizioni, perchè l' equazione ($\imath$) rappresenti tutte le differenti specie delle linee di 2.° grado. Le coordinate x, y si suppongano rettangolari. Ciò posto se noi facciamo in questa equazione $x=0$, o pure $y=0$, nel primo caso y avrà due valori disuguali, come l' avrà x nel secondo: l' origine dunque delle coordinate non sarà sul punto che segna la metà dell' asse delle x, e delle y, ma in un punto qualunque, come A, o A'. Vediamo come portare l' origine sulla metà delle coordinate, e qual semplificazione riceve in tal caso l' equazione ($\imath$): riflettiamo sulle prima, che se si avesse insieme $D=0$ $E=0$, al farsi $x=0$, la y avrebbe due valori eguali $\pm\sqrt{\left[\frac{F}{A}\right]}$, e similmente, posto $D=0$, ed $E=0$, facendo $y=0$, la x avrebbe parimente due valori eguali $\pm\sqrt{\left[\frac{F}{C}\right]}$. Quindi tutto l' impegno consiste a rimuovere l' origine, in modocchè si abbiano da questa operazione le condizioni, onde avere insieme $D=0$, $E=0$. A tal effetto trasportiamo le coordinate in una posizione ad esse parallela, facendo cioè $x=x'+a$, ed $y=y'+b$ (50 II.); allora l' equazione ($\imath$) diverrà

Fig 6

$$\left.\begin{array}{l}Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2\\+(2Ab+Ba+D)y'+(2Ca+Bb+E)x'\\+Ab^2+Bab+Ca^2+Db+Ea-F\end{array}\right\}=0\ .\ .\ .\ (2)$$

La quantità intredotte a, b, che sono le coordinate alla nuova origine (44), se si determinano colla condizione che debbono svanire i coefficienti di y', ed x' danno luogo a queste due equazioni di condizione $2Ab+Ba+D=0$, $2Ca+Bb+$

$E=0$, dalle quali se ne tira $a=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}$, $b=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC}$; allora, facendo $F-Ab^2-Bab-Ca^2-Db-Ea=M$, l'equazione (2) si ridurrà ad

$$Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2-M=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

53. Ma questa equazione (3) è suscettibile ancora di maggior semplificazione, se si fa scomparire il termine $Bx'y'$, ossia se si faccia $B=0$ giacchè in tal caso le coordinate primitive XX'', $Y'Y''$ prenderanno la posizione uu', MM' rispettivamente parallela alla prima, e si taglieranno per metà in punto C. Per analizzare questa condotta di calcolo in tutta la sua estensione, andiamo ad osservare cosa importa la quantità $B=0$. A tal effetto rimontiamo all'equazione generale (1), e sciogliamola rispetto ad una delle variabili, per esempio riguardo ad y, si avrà $y=-\frac{Bx}{2A}-\frac{D}{2A}\pm\sqrt{[P]}$, indicando con $\sqrt{[P]}$ la quantità irrazionale, che n'emerge dalla soluzione dell'equazione (1): or l'equazione $y=-\frac{Bx}{2A}-\frac{D}{2A}$ è chiaro ch'è quella di una retta: andiamola perciò a costruire, e poichè abbiamo da principio supposte rettangolari le variabili x, y, prendiamo due assi rettangolari XX'', $Y'Y''$; indi fatto successivamente $x=0$, ed $y=0$, si avrà nel primo caso $y=-\frac{D}{2A}$, e nel secondo $x=-\frac{D}{B}$: allora, tagliata $AD''=\frac{D}{B}$, ed $AI=\frac{D}{2A}$

Fig. 4

ambidue dalla parte negativa, sarà la retta DD', che passa pe' punti D', I il luogo di questa equazione, il che è chiaro (30).

Ciò posto, prese due coordinate AP, PC ad un punto C di questa retta, sarà $PC=y=-\frac{Bx}{2A}-\frac{D}{2A}$; allora per avere le due radici dell' equazione (t) bisogna riflettere, che o si ha

$$\frac{Bx+D}{2A}>\surd P, \text{ o } \frac{Bx+D}{2A}<\surd P:$$

nel primo caso, adattate dal punto C parallelamente ad YY'' le rette CM, CM' eguali a $\surd P$, il valore di $-\frac{Bx+D}{2A}$ sarà rappresentato da una retta $P'C$ maggiore di CM; quindi si avrà

$$P'M=-\frac{Bx+D}{2A}+\surd P; \text{ e } P'M'=-\frac{Bx+D}{2A}-\surd P:$$

nel secondo caso poi adattate parimente al punto C le rette CM, CM' eguali a $\pm\surd[P]$, la retta PM rappresenterà l' espressione $-\frac{Bx+D}{2A}+\surd P$, e l' altra PM' esprimerà $-\frac{Bx+D}{2A}-\surd P$. In ambidue i casi la retta MM' sarà bisegata dalla DD', giacchè presa una nuova indeterminata $z=y+\frac{Bx+D}{2A}$, la trasformata in z, che si otterrà, darà sempre per z due valori eguali, e contrarj. Sicchè i punti M, M', come tutti gli altri corrispondenti alle diverse ascisse Ap, Ap' saranno simmetricamente disposti riguar-

do a DD'. La DD' bisegherà dunque tutte le parallele ad AY', e si chiamerà perciò *diametro*.

54. Segue da questa costruzione, che poicchè alla condizione $\frac{Bx+D}{2A} > \sqrt{P}$ corrispondono le radici $P'M$, $P'M'$ prese dalla stessa parte, ed all' altra $\frac{Bx+D}{2A} < \sqrt{P}$ corrispondono le radici PM, PM' prese in parti opposte, l'origine delle coordinate sarà ad un punto fuori della curva, o dentro di essa, secondocchè sarà $\frac{Bx+D}{2A} >$, o pure $< \sqrt{P}$.

55. Ciò posto siccome $\frac{B}{2A}$ (29) è la tangente dell' angolo, che il diametro DD' forma coll' asse delle ascisse, nella nostra ipotesi, in cui il sistema delle coordinate diviene uu'; MM' in una posizione parallela alla primitiva, sarà $\frac{B}{2A}$ la tangente dell' angolo DCu: allora lasciando sempre a DD' la proprietà di bisegare le perpendicolari ad uu', se uu' cambierà di posizione, e diverrà, p. e., SS', anche DD' combierà di posizione, e $\frac{B}{2A}$ indicherà la tangente dell' angolo, che fa l' asse SS' col suo diametro: in tal caso la supposizione di $B=0$ farebbe svanire l' angolo che SS' fa col suo diametro, e si avrebbe $y=-\frac{D}{2A}$, cioè un tal diametro diverebbe parallelo ed SS' nella distanza di $\frac{D}{2A}$: ma bisogna riflettere, che essen-

do $Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2-M=0$ risultata in seguito di avere supposto $D=0$, $E=0$; nell' ipotesi che si supponga ancora $B=0$, si avrà $y=0$, ed il diametro andrà allora a confondersi con SS', per cui SS' bisegherà tutte le rette perpendicolari a sè stessa: di vantaggio allorchè l' asse uu' ha presa la posizione SS'; MM', che nella posizione uu' gli era perpendicolare, per continuargli ad esser perpendicolare, dee cambiare posizione, e dee prendere la posizione $R'R$ perpendicolare ad SS', ed allora SS' bisegherà tutte le parallele ad $R'R$. Simili considerazioni hanno luogo, se l' equazione del diametro fosse stata $x=-\frac{By}{2C}-\frac{E}{2C}$, cioè nell' ipotesi presente, in cui, in virtù della prima trasformazione, si ha $E=0$, supponendo $B=0$ l' equazione del diametro rispetto a $R'R$ sarebbe $x=0$, cioè questo diametro andrebbe a confondersi con $R'R$, e bisegarebbe tutte le parallele ad SS'.

56. Da tutta quest' analisi ne segue, che se noi trasformiamo il sistema delle coordinate x', y' in un altro parimente rettangolare, e che in seguito facciamo eguale a zero il coefficiente di $x'y'$, ridurremo l' equazione a rapportarsi a due diametri rettangolari SS', $R'R$, ciascheduno dei quali ha la proprietà di bisegare tutte le parallele all' altro condotte nella curva.

57. Le rette menate nella curva parallelamente ad SS' si dicono ordinate a $R'R$, e le ordinate ad SS' sono quelle, che si menono parallelamente ad $R'R$.

Allorchè due diametri sono talmente disposti che uno taglia per metà tutte le ordinate all' altro, questi chiamansi *diametri conjugati*, e

poicchè l' equazione $Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2-M=0$, per rapportarsi a' diametri conjugati, bisogna che sia $B=0$, ne segue che i diametri conjugati hanno la proprietà di ridurre un' equazione o contenere i soli quadrati delle variabili.

58. Finalmente da quanto abbiamo detto se ne deduce, che $B=0$, $D=0$, $E=0$ sono le condizioni, perchè l' equazione generale (ι) si rapporti à diametri conjugati, i quali, perchè noi abbiamo supposto da principio le coordinate x, y rettangolari, saranno rettangolari.

59. Dunque dopo di aver ridotto l' equazione generale (ι) sotto la forma $Ay'^2+Bx'y'+C'x'^2-M=0$, e ciò trasformando le coordinate in una posizione parallela alla prima, con prendere per coordinate alla nuova origine $\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}$, e $\frac{2CD-BE}{B^2-4AC}$, per fare svanire i termini affetti da x', ed y'; se noi trasformeremo di vantaggio le coordinate in un sistema parimente rettangolare, per introdurre ne' valori di x', ed y' delle quantità, onde poter disporre di esse a causa di fare svanire il coefficiente di $x'y'$, si sarà rapportata l' equazione generale (ι) agli assi rettangolari conjugati.

60. Or se il nuovo sistema SS', $R'R$ sia x'', y'' noi sappiamo che le formole per ottenere l' indicata trasformazione senza cambiare origine sono

$$x'=\cos(x'', x')x''-\text{sen}(x'', x')y''$$

ed

$$y'=\text{sen}(x'', x')x''+\cos(x'', x')y'';$$

dunque sostituendo questi valori di x', y' nell' quoziente $Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2-M=0$ essi si cambierà in quest' altra

$$\left.\begin{array}{r}[A\cos^2(x'', x')-B\cos(x'', x')\text{sen}(x'', x')+\\ C\text{sen}^2(x'',)]y''^2+\\ \left\{\begin{array}{l}2(A-C)\text{sen}(x'',x')\cos(x'',x')+\\ B[\cos^2(x'', x')-\text{sen}^2(x'', x')]\end{array}\right\}x''y''+\\ [A\text{sen}^2(x'', x')+B\text{sen}(x'', x')\cos(x'', x')+\\ C\cos^2(x'', x']x''^2-M=0\end{array}\right\}-(4)$$

Poichè sen(x'', x'), cos(x'', x') si trovano in questa trasformata elevati solamente a 2.^{a} potenza, ne segue, che non vi sono, se non due soli diametri SS', RR' rettangolari e conjugati. Dippiù allorchè l'equazione (3) si è trasformata nella (4), abbiamo fatto sorgere una quantità coefficiente di $x''y''$, la quale, riguardata come una funzione di sen(x'', x'), e cos(x'', x'), può esser combinata coll' altra equazione sen$^2(x'', x')+$ cos$^2(x'', x')=1$ che abbiamo tra sen(x'',x'), cos(x'',x'), onde determinare per sen(x'', x), cos(x'', x') quei valori che rendono libera l'equazione dal termine $x''y''$: a tal effetto mettiamo

$$2(A-C)\text{sen}(x'', x')\cos(x'',x')+$$
$$B[\cos^2(x'', x')-\text{sen}^2(x'', x')]=0;$$

allora l'equazione(4)diverrà $Qy''^2+Px''^2-M=0, ..(5)$ chiamando Q, e P rispettivamente i coefficienti di y''^2 ed x''^2.

60. Esaminiamo l'equazione $Qy''^2+Px''^2-M=0(5)$. E supponiamo sulle prime, che P, Q, ed M abbiano gli stessi segni: allora trasformiamo le coordinate x'', y'' in coordinate polari, facendo uso delle formole note

$x''=R\cos(R, x'')$, $y''=R\text{sen}(R, x'')$:(50,VI),

fattane la sostituzione nell' equazione

$$Qy''^2+Px''^2=M,$$

essa diverrà

$$QR^2\text{sen}^2(R, x'')+PR^2\cos^2(R, x'')=M,$$

da cui si tira

$$R^2=\frac{M}{Q\text{sen}^2(R, x'')+P\cos^2(R, x'')},$$

ed $R=\sqrt{\left[\frac{M}{Q\text{sen}^2(R, x'')+P\cos^2(R, x'')}\right]}$.

Qualunque sia l' angolo (R, x''), questa quantità è sempre reale, finchè R abbia un valor finito; che se supponiamo R infinito, allora dovrà essere $Q\text{ sen}^2(R, x'')+P\cos^2(R, x'')=0$, donde si tira $\text{tang}(R, x'')=\pm\sqrt{\frac{-P}{Q}}$, cioè in questa ipotesi l' angolo (R, x'') diviene imaginario: e poicchè il raggio R può prendere intorno il perimetro della curva tutte le posizioni, ne segue che nell' ipotesi presente, finchè R è finito, la curva è tutta chiusa, e non vi è curva, allorchè R diviene infinito. Questa curva chiamasi *Ellisse*. Andiamo ora ad assegnare i limiti di una tal curva, che fino a questo punto conosciamo esser tutto chiusa. A tal effetto sciogliamo l' equazione $Qy''^2+Px''^2-M=0$ tanto per rapporto ad y'', quando per rispetto ad x'', si avrà $y''=\pm\sqrt{\left[\frac{M-Px''^2}{Q}\right]}$, ed $x''=\pm\sqrt{\left[\frac{M-Qy''^2}{P}\right]}$. La prima di queste due equazioni dimostra, che i due

valori di y'' variano a proporzione che l' ascisso x'' acquista diversi valori, restando però sempre eguali a contrarj. Questo indica, che la curva, cui appartiene questa Equazione, è simmetrica dall' una, e dall' altra parte dell' asse delle x', verità per altro chiara, dietro la trasformazione, con cui abbiamo rapportata la curva a degli assi rettangolari conjugati. I valori di x'' ci portano alla stessa conseguenza a destra, ed a sinistra dell' asse delle y''. Dippiù y'' avrà un valore reale, finchè si avrà $M > Px''^2$, ossia $x'' < \sqrt{\frac{M}{P}}$, ed allorchè si ha $x'' = \sqrt{\frac{M}{P}}$, la y'' diverrà zero, e la curva allora taglierà l' asse delle x'' al di sopra, ed al di sotto dell' origine ad una distanza da esso indicata da $\sqrt{\frac{M}{P}}$.
Al di là di questo valore di x'', ossia se si ha $x'' > \sqrt{\frac{M}{P}}$, y'' avrà due valori imaginarj, e poichè questo ha sempre luogo, o che si metta $+ x''$, o $-x''$, giacchè essendo x''^2 tanto il quadrato di x', che di $-x''$, essa si presenterà sempre sotto la stessa forma, ne segue che i limiti della curva presi sull' asse delle x'' corrispondenti a $y'' = o$ sono $\sqrt{\frac{M}{P}}$, e $-\sqrt{\frac{M}{P}}$. Essa dunque giunta à punti distanti dall' origine per $\pm\sqrt{\frac{M}{P}}$ rivolge il suo corso per ritornare a se stessa: determiniamo ora i limiti sull' asse delle y''.

A tal effetto l' equazione $x'' = \pm\sqrt{\left[\frac{M - Qy''^2}{P}\right]}$

c'. indica che x'' ha un valore reale, finchè si ha $M > Qy''^2$ ossia $y' < \sqrt{\frac{M}{Q}}$. Allorchè si ha $y' = \frac{M}{Q}$, x'' diverrà zero, e la curva taglierà l' asse delle y'' a destra ed a sinistra dall'asse delle x in un punto distante dall' origine per $\sqrt{\frac{M}{Q}}$; oltrepassando y'' questo limite, si avrà $y' > \frac{M}{Q}$, e quindi $M < Qy''^2$, per cui x'' diverrà imaginario, e poichè questo ha egualmente luogo, o che nel valore di x' si metta y''. o $-y''$, ne segue, che i limiti della curva a destra, ed a sinistra dell' asse delle y'' corrispendenti ad $x''=0$ sono $y''=\sqrt{\frac{M}{Q}}$, $y' = -\sqrt{\frac{M}{Q}}$: essa dunque giunta à punti distanti dall' origine per $\pm\sqrt{\frac{M}{Q}}$, rivolge il suo corso per ritornare a se stessa.

Fig. 3. 61. Per segnare ora questi limiti sulla figura, si menino due assi rettangolari XX', YY', e tagliata $OB = \sqrt{\frac{M}{P}}$, ed $OB' = -\sqrt{\frac{M}{P}}$; $OA = \sqrt{\frac{M}{Q}}$, $OA' = -\sqrt{\frac{M}{Q}}$, si tirino dà punti B, B', A, A' le perpendicolari BS, $B'S'$, AT', $A'T'$ rispettivamente agli assi BB', AA'; la curva allora non potrà uscire dalla figura $ST'S'T$.

Il punto O origine degli assi conjugati, che divide per metà gli assi stessi BB', AA' si dice *centro della curva*.

62. Si chiami a la quantità $\sqrt{\frac{M}{P}}$, sarà $a^2 = \frac{M}{P}$,

ed $M=Pa^2$; allora l'equazione $Qy'^2+Px'^2=M$ diverrà $y'^2=\frac{P}{Q}(a^2-x'^2)$; Chiamiamo b la quantità $\sqrt{\frac{M}{Q}}$, sarà $b^2=\frac{M}{Q}$, e quindi $M=Qb^2$: ma è ancora $M=Pa^2$, sicchè sarà $Pa^2=Qb^2$, d'onde ti tira $\frac{P}{Q}=\frac{b^2}{a^2}$: sostituito questo valore, di $\frac{P}{Q}$ nell'equazione $y''^2=\frac{P}{Q}(a^2-x''^2)$, essa si cambierà in $y''^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x''^2)$, ossia, mutando le y'', ed x'' rispettivamente in y, ed x, $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$. Questa è l'equazione dell'ellisse rapportata a delle coordinate rettangolari, la cui origine è nel centro. Dando ora ad x tutt'i valori differenti Om, Om', OP, Om'' . ., gli estremi n, n', J, n'', n''' . . . . . . delle corrispondenti ordinate segneranno il perimetro ellittico, i cui assi conjugati rettangolari sono $2\sqrt{\frac{M}{P}}$, $2\sqrt{\frac{M}{Q}}$.

63. Se nell'equazione $Qy''^2+Px^2=M$, sia M una quantità negativa, allora l'equazione $Qy''^2+Px^2=-M$ dando per y'', ed x'' una quantità imaginaria, non apparterrà a veruna curva, e se si ha $M=0$, si avrà $Qy''^2+Px''^2=0$, equazione che si verifica, facendo $y''=0$, o $x''=0$, e che per conseguenza si rapporta all'origine stessa delle coordinate (24).

Egli è chiaro, che se i due assi BB' AA' fossero eguali, l'ellisse $ABA'B'$ si cambierebbe

in un cerchio, la cui equazione sarebbe per conseguenza $y^2=a^2-x^2$. Dimostreremo in appresso esser questa l' equazione del cerchio rapportata all' origine nel centro.

64. Esponiamo presentemente il caso, in cui Q, e P hanno diversi segni nell' equazione $Qy''^2+Px''^2-M=0$. Allora, dando ad M il doppio segno $\pm$, la sudetta equazione diverrà $Qy''^2-Px''^2\pm M=0$: Se cambiamo le coordinate y'', x'' in coordinate polari, facendo uso delle note formole $x''=R\cos(R,x'')$, ed $y''=R\text{sen}(R,x'')$, essa diverrà $(Q\text{sen}^2(R,x'')R^2-P\cos^2(R,x'')R^2=\mp M$, da cui si tira $R=\sqrt{\left[\frac{\mp M}{Q\text{sen}^2(R,x'')-P\cos^2(R,x'')}\right]}$. Il valore di R potrà essere reale, o imaginario; sarà reale, allorchè alla quantità $-M$ corrisponde la condizione $Q\text{sen}^2(R,x'')<P\cos^2(R,x'')$, o $\text{tang}^2(R,x'')<\frac{P}{Q}$; o pure alla quantità $+M$ corrisponde la condizione $Q\text{sen}^2(R,x'')>P\cos^2(R,x'')$, o $\text{tang}^2(R,x'')>\frac{P}{Q}$; quando queste condizioni non hanno luogo nel tempo stesso, il valore di R sarà imaginario. Per render conto di tutte queste cose, bisogna riflettere, che nell'equazione $Qy''^2-Px''^2=\mp M$, la quantità $-M$ rende y imaginario, allorchè $x''=0$, e l'altra $+M$ rende imaginario x'', allorchè si ha $y''=0$, giacchè nel primo caso si ha $y''=\pm\sqrt{-\frac{M}{Q}}$, e nel secondo $x''=\pm\sqrt{-\frac{M}{P}}$ Dippiù l' equazione $Qy''^2-Px''^2=-M$, quando è $y''=0$ ci da $x''=\pm\sqrt{\frac{M}{P}}$

e l' altra $Qy''^2=Px'^2+M$ ci da $y'=\pm\sqrt{\frac{M}{Q}}$, allorchè si ha $x''=0$. Dunque la curva, cui si rapporta l' equazione $Qy''-Px''^2\pm M=0$ non è incontrata, che da uno de' suoi assi x'', y'', e quello che l' incontra sarà l' asse delle x', se l' equazione sarà della forma $Qy''^2-Px''^2+M=0$, o pure l' asse delle y'', se sarà della forma $Qy''-Px''^2-M=0$: nel primo caso sarà imaginario l' asse delle y'', e nel secondo quello della x''. Ecco dunque a che tiene il doppio segno $\pm$ posto innanzi ad M: possiamo perciò considerare un solo di questi casi, p.e., l' equazione $Qy''^2-Px''^2+M=0$, giacchè per l' altro le consegnenze sono le medesime. Allora si chiami a la quantità $\sqrt{-\frac{M}{P}}$, e $b\sqrt{-1}$ l' altra$=\sqrt{-\frac{M}{Q}}$; sarà $a^2=\frac{M}{P}$, e $b^2=\frac{M}{Q}$, da cui si tira $M=Pa^2, M=Qb^2$, e quindi $Pa^2=Qb^2$, e $\frac{P}{Q}=\frac{b^2}{a^2}$: in tal caso messa l' equazione $Qy''^2-Px''^2=-M$ sotto la forma $y''^2=\frac{P}{Q}\left[x''^2-\frac{M}{P}\right]$, si sostituiscano a $\frac{P}{Q}$ ed a $\frac{M}{P}$ i di loro valori rispettivi $\frac{b^2}{a^2}$, ed a^2, e la risultante sarà $y''^2=\frac{b^2}{a^2}(x''^2-a^2)$.

65. Per trovare il corso di questa curva, si menino i due assi rettangolari $B'B'$, JJ': sia O l' origine: allora nell' equazione $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x''^2-a^2)$, Fig. 4. o si ha $x''=a$, o $x''<a$, o $x''>a$: nel 1° caso, essendo

$a=\sqrt{\frac{M}{P}}$, si prenda $OB'=\sqrt{\frac{M}{P}}$, ed $OB=-\sqrt{\frac{M}{P}}$ e la curva passerà per i punti B', e B, senza poter giammai incontrare l'altro asse JJ, il qual' è imaginario: nel secondo caso y'' essendo imaginario, ne segue che per tutto il tratto $B'B$, esclusine i punti B', B non vi corrisponde verun ramo di curva: finalmente nel terzo caso y ha due valori reali, qualunque sia l'aumento che possa ricevere x rispetto ad a, e poichè y ha due valori reali corrispondenti a $+x''$, e due altri valori egualmente reali corrispondenti a $-x''$, giacchè essendo x''^2 il quadrato tanto di x'', che di $-x''$, l'equazione si presenta sempre sotto la stessa forma, ne segue che la curva, cui si rapporta questa equazione ha quattro rami infiniti. Quindi la forma della curva caratterizzata dall' equazione $y''^2=\frac{b^2}{a^2}(x''^2-a^2)$ sarà $ABR\,DB'F$, nella quale i rami $BA, BR, B'F, B'D$ si spingeranno all' infinito a proporzione, che cresceranno le ascisse Om', Om'', Om''' . . .

66. Quando l'equazione è della forma $Qy''^2-Px''^2=M$, ossia $y''^2=\frac{b^2}{a^2}(x''^2+a^2)$, allora essendo l'asse $2a$, ossia BB' imaginario, l'asse JJ reale, la curva prende la forma $HJKH'J'K'$.

Questa curva viene chiamata *Iperbole*, e non differisce dall' ellisse; se non perchè uno de' suoi assi è imaginario: infatti l'equazione dell' Ellisse $y''^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x''^2)$ si cambia in quella dell' iperbole, ponendola sotto la forma $y''^2=-\frac{b^2}{a^2}(a^2-x''^2)$, ossia

prendendo per imaginario l'asse $2b$, come qui si è fatto, oppure l' asse $2a$.

67. Allorchè si ha $M=0$, l' equazione $Qy''^2-Px''^2=0$ darà $y=\pm x''\sqrt{\frac{P}{Q}}$: . . . . (h), la quale è l' equazione ad una retta, che passa per l' origine degli assi, e che fa coll' asse delle ascisse un angolo, la cui tangente è $\sqrt{\frac{P}{Q}}$, e poicchè questa tangente è affetta da doppio segno, essa costruirà due rette situate simmetricamente dall' una, e l' altra parte dell' asse delle x''. Mettiamo y, ed x in luogo di y'', ed x'', ed essendo $\frac{P}{Q}=\frac{b^2}{a^2}$(64), l'equazione ($h$) diverrà $y=\pm\frac{b}{a}x$. Siano BB, JJ i due assi dell' iperbole: indi costruiscansi su di questi assi le rette simboleggiate dall'equazione $y=\pm\frac{b}{a}x$, o inclinando dal centro O all'asse delle ascisse le rette OT, OS sotto un angolo la cui tangente è $\frac{b}{a}$; o costruendo sugli stessi assi due rette per mezzo dell'equazione $y=\pm\frac{b}{a}x+A$, in cui A è una grandezza costante, ed indi menando a queste dal centro O le parallele OS, OT. Per osservare in confronto col perimetro della curva il corso di queste rette, paragoniamo l' espressione di un' ordinata PA all' iperbole con quella PT ad una di queste rette; sarà $PA=\frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}$, e $PT=\frac{b}{a}x$,

Fig. 4.

e quindi $PT-PA=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}x\sqrt{(1-\frac{a^2}{x^2})}$, cioè $AT=\frac{b}{a}x\left[1-\sqrt{(1-\frac{a^2}{x^2})}\right]$, e sviluppando in serie il radicale, e riducendo sarà $AT=\frac{b}{a}\left[\frac{a^2}{2x}+\frac{a^4}{4x^3}\right]$. Or qualunque valore si dia ad x non è mai possibile, che questa espressione divenga zero; dunque la retta AT non svanirà giammai, e poichè, a proporzione, che x cresce di valore, l'espressione di AT si va sempre più rendendo più piccola, finchè diviene infinitesima, quando x è ∞, ne segue che le due rette $T'T$, $S'T$ determinate dall' equazione $y=\pm\frac{b}{a}x$ si avvicinano continuamente alla curva, a proporzione che questa s' inoltra all' infinito, senza poterla giammai raggiungere.

68. I Geometri conoscono queste rette col nome di *asintoti*. Noi vedremo in seguito qual forma prende l' equazione dell' iperbole riguardo agli asintoti. Intanto bisogna riflettere, che menata dal punto B vertice dell' iperbole una retta BR' perpendicolare ad OB, finchè incontri l' asintoto OS, poichè si ha $1:\text{tang}\,BOR'=OB:BR'$, ossia nè simboli $1:\frac{b}{a}::a:BR'$, si avrà $BR'=b$, e quindi resteranno determinati gli asintoti di una iperbole, facendo passare due rette OT, OS pel centro di essa, e per gli estremi dell' asse $R'R$ conjugato a BB', e menato perpendicolare ad OB dal vertice B

69. Da quanto abbiamo detto si rileva, che l'equazione $Qy'^2+Px'^2=M$, posto che M sia una quantità positiva, per la realtà della curva, appartie-

ne all' Ellisse, allorchè P, e Q hanno lo stesso segno, e, qualunque sia il segno di M., appartiene all' iperbole, allorchè P, e Q sono affetti di diverso segno. Dunque per aver nè soli coefficienti dell' equazione generale (1) il carattere, per distinguere, quando essa appartiene all' Ellisse, e quando all' Iperbole, fa d' uopo determinare P, e Q in funzione de' coefficienti A, B, C . . . A tal effeto rimontiamo à valori di P, e Q; essi sono

$$Q=A\cos^2(x'',x')-B\cos(x'',x')\mathrm{sen}(x'',x')+ C\mathrm{sen}^2(x'',x') \ldots (H)$$

$$P=A\mathrm{sen}^2(x'',x')+B\cos(x'',x')\mathrm{sen}(x''.x')+ C\cos^2(x'',x') \; (60) \ldots (J):$$

allora bisogna determinare $\mathrm{sen}(x'',x')$, e $\cos(x'',x')$, per sostituirne i valori in quelli di P, e Q; questo, come abbiamo cennato al di sopra (60) si fa mediante le due equazioni

$$2[A-C]\mathrm{sen}[x'',x')\cos(x'',x')+ B[\cos^2(x'',x')-\mathrm{sen}^2(x'',x')]=0, \text{ e}$$
$$\mathrm{sen}^2(x'',x')+\cos^2(x'',x')=1,$$

delle quali la prima è l' equazione di condizione per fare svanire il termine in $x''y''$. Questa ci da

$$\mathrm{sen}[x'',x']\cos[x'',x']=B\left[\frac{\cos^2(x'',x')-\mathrm{sen}^2(x'',x')}{2[C-A]}\right]$$

ossia, facendo $\frac{B}{2(C-A)}=K$,

$$\mathrm{sen}(x'',x')\cos(x'',x')=K[\cos^2(x'',x')-\mathrm{sen}^2(x'',x')].$$

Eleviamo questa equazione a quadrato, sostituendo in luogo di $\mathrm{sen}^2(x'',x')$ la quantità $1-\cos^2(x'',x')$, si

avrà $\cos^4(x'',x')-\cos^2(x'',x')=-\frac{K^2}{1+4K^2}$ la quale sciolta da

$$\cos^2(x'',x')=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\left[\tfrac{1}{4}-\frac{K^2}{1+4K^2}\right]}=\tfrac{1}{2}\pm\frac{1}{2\sqrt{[1+4K^2]}}$$

e quindi essendo $\text{sen}^2(x'',x')=1-\cos^2(x'',x')$, sostituendo in luogo di $\cos^2(x'',x')$ il valore ritrovato, si avrà

$$\text{sen}^2(x'',x')=1-\left[\tfrac{1}{2}\pm\frac{1}{2\sqrt{(1+4K^2)}}\right]=\tfrac{1}{2}\mp\frac{1}{[2\sqrt{(1+4K^2)}]^2}$$

e restituendo a K il suo valore $\frac{B}{2(C-A)}$, ed avendo riguardo al solo segno superiore de' radicali, si avrà

$$\cos^2(x'',x')=\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2(1+4K^2)}=\tfrac{1}{2}\pm 1:2\sqrt{\left[\frac{(C-A)^2+B^2}{(C-A)^2}\right]}=$$

$\tfrac{1}{2}+\frac{C-A}{2\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}}$: quindi sarà $\text{sen}^2[x'',x')=\tfrac{1}{2}-\frac{C-A}{2\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}}$; $\cos^2(x'',x')-\text{sen}^2(x'',x')=\frac{C-A}{\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}}$; $\cos(x'',x')\text{sen}(x'',x')=$

$$B\left(\frac{\cos^2[x'',x']-\text{sen}^2[x'',x']}{2(C-A)}\right)=\frac{B[C-A]}{2[C-A]\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}}=\frac{B}{2\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}}$$

Ciò fatto si sommino i valori (H), ed (J) di Q, e P, si avrà $[A+C]\text{sen}^2(x'',x')+\cos^2(x'',x')=P+Q$, ossia sostituendo in luogo di $\text{sen}^2(x'',x')$, e $\cos^2(x'',x')$ i valori ritrovati, sarà $P+Q=(A+C)(\tfrac{1}{2}+\frac{C-A}{2\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}}+\tfrac{1}{2}-\frac{C-A}{2\sqrt{[(C-A)^2=B^2]}})=A+C\ldots(m)$

e dall'espressione (H) sottraendo l'altra (J), si otterrà $Q-P=[(A-C)\cos^2(x'',x')-\text{sen}^2(x'',x')]-2B\cos[x'',x']\text{sen}[x'',x']$, ossia, sostituendo i valori di $\cos^2[x'',x']-\text{sen}^2[x'',x']$, e di $\cos[x'',x']\text{sen}[x'',x']$,

$$Q-P=[A-C]\frac{C-A}{\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}}$$

$$-2B\frac{B}{2\sqrt{([C-A]^2+B^2)}}=-\frac{\{(C-A)^2+B^2\}}{\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}}=$$

$-\sqrt{([C-A]^2+B^2)}$ . . . (a): allora l' espressioni (m) ed. (n) ci danno mercè della somma, e della sottrazione $Q=\frac{1}{2}[C+A]-\frac{1}{2}\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}$, e $P=\frac{1}{2}[C+A]+\frac{1}{2}\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}$

Ciò posto allorchè P, e Q hanno gli stessi segni, o sono amendue positivi, o negativi. Saranno amendue positivi, quando $C+A$ è una quantità positiva, e quando si ha insieme $C+A>\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}$, che val lo stesso $B^2-4AC<0$, giacchè in tal caso P è sempre una grandezza positiva, e Q lo diviene per essere la quantità razionale $\frac{1}{2}(C+A)$ maggiore dell' irrazionale $\frac{1}{2}\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}$: saranno poi amendue negativi, quando $C+A$ è negativa, ed ha luogo insieme la condizione $(C+A>\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}$, ossia $B^2-4AC<0$, giacchè in tal ipotesi Q come aggregato di due grandezze negative, è sempre negativo, e P lo diviene per esser la parte razionale negativa $\frac{1}{2}[C+A]$ maggiore dell' irrazionale positiva $\frac{1}{2}\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}$.

Al contrario affinchè P, e Q abbiamo diversi segni, o la quantità $C+A$ è positiva, o negativa, dobbiamo sempre supporre $(C+A)<\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}$; o ch' è lo stesso $B^2-4AC>0$, giacchè in ambidue i casi P è positivo, e Q negativo, per essere la quantità irrazionale maggiore della razionale, come può osservarsi

Conchiudiamo da quest' analisi, che la condizione, affinchè P, e Q abbiano lo stesso segno da luogo all' altra $B^2-4AC<0$, e che affinchè P, e Q abbiamo diversi segni, dee essere $B^2-4AC>0$. Dunque la condizione $B^2-4AC<0$ è il carattere perchè un' equazione quadratica tra due variabili si rapporti all' Ellisse, e l' altra $B^2-4AC>0$ è la marca distintiva dell' equazione all' iperbole.

70. Ma cosa diremo, allorchè si ha $B^2-4AC=0$? Allora riflettendo ch' è $4AC=2AC, +2AC$, la condizione $B^2-4AC=0$ si cambierà in quest' altra $2AC=B^2-2AC$: aggiungiamo ad ambe le parti A^2+C^2, si avrà $[C+A]^2=([C-A]^2+B^2])$, e $C+A=\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}$, e quindi $Q=\frac{1}{2}[(C+A)-\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}]=0$. Allora l' equazione (5) sciolta, e posta sotto la forma $y''=\sqrt{\frac{P}{Q}\left[\frac{M}{P}-x''^2\right]}$, da per y'' un valore infinito. Dippiù in questa ipotesi divengono infinite le quantità $\frac{2AB-BD}{B^2-4AC}$, e $\frac{2CD-BE}{B^2-4AC}$ (52) che sono i rispettivi valori di a, b tirati dall' equazioni $2Ab+Ba+D=0$, $2Ca+Bb+E=0$, cosicchè non possiamo far uso di quest' equazioni, nè per conseguenza della trasformazione delle coordinate parallelamente a se stesse per fare svanire i termini moltiplicati in y, ed x. Bisogna dunque per semplificare l' equazione (1) in questa ipotesi, ricorrere ad altri maneggi.

71. Principiamo dal fare svanire il termine Bxy, trasformando la coordinate x, y in altre x', y' parimente rettangolari, facendo cioè uso delle formole $y=\text{sen}(x',x)x'+\cos(x',x)y'$, ed $x=\cos(x',x)x'-\text{sen}(x',x)y'$; mediante di questi valori di y, x, l' equazione generale diverrà

$$Qy'^2+Px'^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\mp 2[A-C]\cos(x',x)\mathrm{sen}(x',x)+B[\cos^2(x',x)-\\ \mathrm{sen}^2(x',x)]x'y'+[D\mathrm{sen}(x',x)+E\cos(x',x)]x'+\\ {[D\cos(x',x)-E\,\mathrm{sen}(x',x)]y'-F=0}\end{array}\right\}\ldots(p)$$

Noi abbiamo tra $\cos(x',x)$, e $\mathrm{sen}(x',x)$ una condizione espressa da $\mathrm{sen}^2(x',x)+\cos^2(x'x)=1$: se dunque disponiamo delle quantità $\mathrm{sen}(x',x)$, $\cos(x',x)$ colla condizione che svanisca il termine moltiplicato per $x'y'$, ne sorgerà tra $\mathrm{sen}(x',x)$, e $\cos(x',x)$ l' altra condizione

$$2(A-C)\cos(x',x)\mathrm{sen}(x',x)+ \\ B[\cos^2(x',x)-\mathrm{sen}^2(x',x)]=0,$$

e per

$$\mathrm{sen}(x',x), \cos(x',x), P, Q$$

si troveranno gli stessi valori, che abbiamo precedentemente ritrovati (69), non dipendendo queste quantità, che dalle medesime equazioni di condizione; ed allora l' equazione $[p]$ diverrà

$$Qy'^2+Px'^2+[D\mathrm{sen}(x',x)+E\cos(x',x,)]x'+ \\ [D\cos(x',x)-E\mathrm{sen}(x',x)]y'-F=0\ldots[p']$$

Essendo $Q=0$, l' equazione precedente diviene $Px'^2+Ry'+Sx'+K=0\;.\;.\;.\;.[p]$, chiamando R,S, e K rispettivamente i coefficienti di y', x', e la quantità indipendentemente da x', ed y'. Per semplificarla si trasformino le coordinate parallelamente alla primitiva posizione, prendendo $x'=x''+a'$, ed $y'=y''+b'$, essa si cambierà in

$$P[x''^2+2a'x''+a'^2]+R[y''+b']+S[x''+a']+K=0, \text{ossia}$$

$$Px''^2+[2a'P+S]x''+Ry''+Pa'^2+Sa'+Rb'+K=0\ldots[p'']$$

Questa trasformata ci fa comprendere, che noi non possiamo fare svanire, se non il termi-

re in x'', facendo $2a'P+S=o$, ossia prendendo $a'=-\frac{S}{2P}$; al contrario non è possibile fare svanire il termine Ry'', giacchè il coefficiente di y'' nell' equazione (p'') si trova esser lo stesso di y' nell' equazione (p'), e non trovasi in esso introdotta veruna delle quantità a', b', per potere stabilire una condizione a far svanire y''. Se P fosse zero, e non Q si dimostrerebbe similmente che nell' equazione $Qy'^2+Ry'+Sx'+K=o$ non sarà giammai possibile fare svanire il termine Sx';

72. Ne segue dunque, che nell' ipotesi di $B^2-4AC=o$ l'equazione generale (i) può ridursi ad una di queste $Px'^2+Ry'+K=o$, o $Qy'^2+Sx'+K=o$ secondocch' è o Q, o $P=o$. Consideriamo questa seconda, e messa sotto la forma $Qy'^2+S(x'+\frac{K}{S})=o$, si faccia $x'+\frac{K}{S}=x$, essa diverrà $Qy'^2+Sx=o$ Mettiamo y in luogo di y', e facciamo $\frac{S}{Q}=-p$, si avrà $y^2=px$. Sia $x=\infty$, sarà $y=\pm\sqrt{p\infty}$, e preso x dalla parte negativa, cioè fatto $x=-\infty$, y avrà due valori imaginarj $\pm\sqrt{-p\infty}$.

Segue da ciò, che la curva, cui appartiene l'equazione $y^2=px$ ha due soli rami infiniti, in che differisce dall' iperbole, la quale ne ha quattro. Che se p sia una quantità negativa, allora affinchè y sia reale, bisogna che sia anche x negativo, e la curva rivolgerà allora il suo corso della parte delle ascisse negative. Questa curva si chiama parabola. Nel primo caso, presi i due assi ortogonali AX, AY, e contate le ascisse positive da A verso X, la curva prenderà la figura MAN, avendo i due

rami AM, AN indefiniti, e nel secondo essa prenderà la figura $M'AN'$. Per descriverla, bisogna dare ad x tutt' i valori possibili tra o, ed ∞ $Am, Am'Am''$.., gli estremi n, n, n''. . . delle coordinate corrispondenti segneranno il perimetro della parabola.

73. Conchiudiamo da quest' analisi, che l' equazione generale (1) costruirà un' ellisse, un' iperbole, o una parabola, secondochè si avrà rispettivamente $B^2-4AC<0, >0$, o pure $=0$.

Ma assoggettiamo ad un' analisi più rigorosa, ed estesa tutti i coefficienti dell' equazione generale, per esaminarla in tutta la sua generalità.

74. Abbiamo osservato al di sopra, come di passaggio, che l' origine A delle coordinate era dentro, o fuori la curva (54), secondocchè la quantità $\frac{Bx+D}{2A}$ era minore, o maggiore della quantità irrazionale che fà parte delle radici dell' equazione (1). Estendiamo ora le ricerche, ed andiamo a ravvisare quali condizioni debbono avere i coefficienti A, B, C, ec. affinchè l' origine delle coordinate sia o sul perimetro della curva, o fuori di essa, e dentro la curva. Si sa primieramente, che l' origine delle coordinate viene fissata per mezzo delle due equazioni di condizione $y=0, x=0$ (24): supponiamo in primo luogo $x=0$ nell' equazione generale, essa si ridurrà ad $Ay^2+Dy+F=0$, che segnerà i punti, ove la curva incontra l' asse della y: se supponiamo ancora $y=0$, per avere le condizioni dell' origine, si avrà $Ay^2+Dy=0$, e quindi $F=0$; ora si ha parimente per la supposizione di $x=0$, $Cx^2+Ex=0$, e quindi, essendo anche $y=0, F=0$; ne segue perciò che $Ay^2+Dy=0$, e $Cx^2=Ex=0$ sono le due condizioni, affinchè l'origine delle coordinate sia sulla curva, condizioni, le quali

avendo luogo, allorchè si ha $F=0$, sarà questa la condizione per ravvisare sul perimetro della curva l' origine delle coordinate. Ecco perchè avendo noi esaminata l' equazione generale (1) senza supporre $F=0$, non abbiamo fissata l' origine sul perimetro delle curve discusse.

Fig. 6. Se l'origine è in un punto A dentro la curva, allora le due radici An, An' debbono esser prese in parte opposta, e quindi debbono avere diverso segno: dunque in questo caso è necessario, che l' equazione $Ay^2+Dy+F=0$ dia per y due valori di segno contrario: vediamo quando ciò succede. Le radici di questa equazione, dando a D il doppio segno, sono

$y=\mp\frac{D}{2A}\pm\sqrt{\left[\frac{D^2}{4A^2}-\frac{F}{A}\right]}$; le quali, come si sa dall' Algebra, allora saranno di segno contrario, quando la parte radicale diviene $\sqrt{\left[\frac{D^2}{4A^2}+\frac{F}{A}\right]}$ il che non può aver luogo, se la quantità $-\frac{F}{A}$ non sia positiva, ossia se F, ed A non abbiano diversi segni. Queste considerazioni fatte rispetto ad x ci portano similmente a conchiudere, che per la possibilità della $n.^a$ ipotesi, le quantità F, C debbono aver diversi segni, come ci viene indicato dall' equazione $x^2+\frac{E}{C}x+\frac{F}{C}=0$. Finalmente è noto dall' Algebra, che quando la quantità $\sqrt{\left[\frac{D^2}{4A^2}-\frac{F}{A}\right]}$ non riceve verun cambiamento in $-\frac{F}{A}$, allora le radici dell' equazione $y^2\pm\frac{D}{A}y+\frac{F}{A}=0$ saranno am-

bidue positive, o ambidue negative, secondocchè $\frac{D}{A}$ è negativo, o positivo(9); quindi in tal caso le radici si prenderanno dalla stessa parte, e l' origine delle coordinate sarà ad un punto A' fuori della curva: egli è chiaro che in questo caso F, ed A debbono aver lo stesso segno, giacchè altrimenti la quantità $\sqrt{\left[\frac{D^2}{4A^2}-\frac{F}{A}\right]}$ diverrebbe $\sqrt{\left[\frac{D^2}{4A^2}+\frac{F}{A}\right]}$. Per la possibilità dell' ipotesi presente rispetto ad x, i coefficienti F, e C debbono avere gli stessi segni: Dunque quando si ha $F=0$, l' origine delle coordinate è sul perimetro della curva; quando A, e C sono affetti da un segno diverso da quello, che ha F, l' origine è dentro la curva, e quando A, C hanno lo stesso segno di F, l' origine è fuori della curva.

75. Allorchè l' equazioni $Ay^2+Dy+F=0$, $Cx^2+Ex+F=0$ hanno luogo esclusivamente una dall' altra, potremo nel primo caso aver le condizioni perchè la curva incontri l' asse delle y in due punti, in uno solo, o non l' incontri giammai; e nel secondo avremo le condizioni per l' incontro della curva coll' asse della x. Analizziamo una di case, p. e la prima: le sue radici sono $y=-\frac{D}{A}\mp\frac{1}{2A}\sqrt{[D^2-4AF]}$: or può essere $D^2>4AF$; $D^2=4AF$, $D^2<4AF$; nel primo caso è chiaro che y ha due valori; nel secondo la quantità irrazionale svanisce, ed y ha un sol valore; nel 3° finalmente y ha due valori imaginarj: quindi nel 1° caso l' asse delle y incontra la curva in due punti; nel secondo gli è tangente, e nel 3° non l' in-

contra giammai. L' equazione $Cx^2+Ex+F=0$ ci da le seguenti condizioni $E^2>4CF$, $E^2=4CF$, $<4CF$, secondocchè l' asse della x incontra la curva in due punti, in un punto solo, o non l'incontra giammai.

L'equazione $2y^2-6xy+5x^2-8x-7y+3=0$ soddisfa alle condizioni $B^2-4AC<0, D^2>4AF, E^2>4CF$; quindi essa appartiene all'ellisse, ed è incontrata in due punti tanto dall' asse delle x, quanto da quello delle y. L'altra $2y^2+7xy+4x^2+6y+7x+3=0$ soddisfa alle condizioni $B^2-4AC>0, D^2>4AF, E^2>4CF$. L' equazione $3y^2+5xy+4x^2+6y+7x+3=0$, la quale appartiene all' ellisse, allorchè il coefficiente di xy è 5, ed all' iperbola allorch' è 7, soddisfa alle condizioni $D^2=4AF, E^2>4CF$: quindi la curva è tangente all' asse delle y, e taglia in due punti l' asse della x.

76. Vi è ancora un caso, che bisogna esaminare, cioè allorchè nell' equazione generale si ha insieme $A=0, C=0$, con che svaniscono i termini Ay^2, Cx^2, ed essa si riduce sotto la forma $Bxy+Dy+Ex+F=0$, o sotto l' altra $xy+D'y+E'x+F'=0$, facendo $\frac{D}{B}=D'$, $\frac{E}{B}=E'$, ed $\frac{F}{B}=F'$: sciolta essa rispetto ad una delle variabili, p. e., ad y da $y=\frac{-E'x-F'}{x+D'}$, ossia, effettuendo la divisione, $y+E'=\frac{E'D'-F'}{x+D'}$: trasportiamo le coordinate parallelamente alla primitiva posizione, prendendo per coordinate alla nuova origine D', ed E', si avrà $x'=x+D'$, ed $y'=y+E'$ (50 II), valori, che, sostituiti nell' ultima equazione, la cambiano in $y'=$

$\frac{E D' - F'}{x}$, ossia, facendo $E D' - F = H$, si avrà in ultim' analisi $x'y' = H$. Questa risultante equazione è simmetrica, o che si sciolga rispetto ad x', o ad y'; sciolta, p, e, rispetto ad y', ossia messa sotto la forma $y' = \frac{H}{x}$, ci fa vedere che y' non può giammai divenire zero, ma che può percorrere i valori, tra ∞, ed $\frac{1}{\infty}$, secondocchè si ha $x' = 0$, o $x' = \infty$; e poicchè questo ha egualmente luogo, mettendo $-x'$ in vece di x', y' si conterrà tra limiti ancora di $-\infty$, e $-\frac{1}{\infty}$. Questa proprietà sembra simile a quella degli asintoti: esaminiamola con rapportare l' iperbole agli asintoti SS', TT'; contando su di TT' le x', prendiamo l' origine al punto O, ove si ha $x' = 0$, e $-x' = 0$, allora OS nel primo caso, ed OS' nel secondo diverranno infiniti, prolungandosi insieme co' rami infiniti della curva; a proporzione poi, che le ascisse principiano a crescere, divenendo, p, e, OR, OT. . . , l' ordinata acquisterà un valore finito Rr, Tx, ..., quantità che vanno sempre più diminuendo come x' cresce di valore, e che finalmente divengono infinitesime, quando è $x = \infty$: l' equazione dunque $x'y' = H$ è quella dell' iperbole tra gli asintoti: egli è chiaro per altro che, quando si ha $A = 0$, $C = 0$, l' equazione (t) debba appartenere all' iperbole; infatti in questa ipotesi ha luogo la condizione $B^2 - 4AC > 0$. Noi in appresso dimostraremo direttamente, che l' equazione dell' Iperbole tra gli asintoti dee prendere questa forma, ed all' opposto, che sotto di questa forma essa non può rapportarsi, che all' iperbole tra gli asintoti: ivi determineremo ancora la quanti-

Fig. 4.

tà H. Intanto con un processo analitico ed ingegnoso possiamo convincerci, che l' equazione $xy=H$ non può appartenere, se non all' iperbole. Ecco su qual raziocinio poggia l' analisi, che andremo a svilupare: se l' equazione $xy=H$ appartiene all' iperbole, trasformate le coordinate $x\,y$ in coordinate rettangolari, la risultante dovrà essere della forma dell' equazione dell' iperbole ritrovata al disopra. Vediamo, se ciò è vero, facendo $x=\cos(x',x)x'-\text{sen}(x'.x)y'$, ed
$y=\text{sen}(x',x)x'+\cos(x',x)y'$ (50 IV.); fattane la sostituzione nell' equazione $xy=H$, e riducendo si avrà
$\text{sen}(x',x)\cos(x,x)x'^2-[\text{sen}^2(x',x)-\cos^2(x',x)]x'y'-$
$\text{sen}(x',x)\cos(x',x)y'^2=H$,
ossia $Px'^2-Qy'^2-Rx'y'=H$, chiamando P il coefficiente di x'^2, Q quello di y'^2, ed R quello di $x'y'$: se facciamo $R=0$, per rapportare la curva a diametri conjugati (57), si avrà $Px'^2-Qy'^2=H$, o pure $Qy'^2-Px'^2=-H$, equazione simile a quella dell' iperbole rapportata al di sopra (64).

77. Per dare alla nostra discussione un estenzione maggiore, e per non mancare insieme ad analizzare l' equazione generale (1) in tutte le sue parti noi entriamo in un esame più dettagliato, che ci farà rilevare que' casi particolari, ne' quali l' equazione (1) costruisce delle rette, de' punti, e talvolta si rende anche impossibile, ed andremo con ciò a segnare le linee, cui si rapporta una data equazione di 2.° grado.

L' esame di questi casi si ha molto agevolmente da quello de' coefficienti indeterminati: noi andiamo ad occuparcene. Sulle prime poicchè l' equazione generale (1), (52), da i stessi risultati, o che si sciolga per riggardo ad y, o riguardo ad x, giacchè, sciolta sispetto ad y, si avranno le radici di x, sostituendo in quelle di E a D,
[illegible]

C ad A, come può agevolmente verificarsi, noi ci occuperemo di una di esse: Si sciolga dunque l' equazione (1) rispetto ad y, si avrà

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\mp$$

$$\frac{1}{2A}\sqrt{[(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+(D^2-4AE)]}$$

Mettiamo questa equazione sotto la seguente forma

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\mp$$

$$\frac{1}{2A}\sqrt{\left[(B^2-4AC)[x^2+2\left(\frac{BD-2AE}{B^2-4AC}\right)x+\right.}$$

$$\left.\left(\frac{D^2-4AF}{B^2-4AC}\right)]\right] \ldots (M);$$

allora per avere le condizioni, perchè i valori di y siano reali, o imaginarii, fa d' uopo esaminare le radici dell' equazione

$$x^2+2\frac{BD-2AE}{B^2-4AC}x+\frac{D^2-4AF}{B^2-4AC}=0 \ldots (N)$$

Le quantità irrazionale che forma parte delle radici di questa equazione è

$$\sqrt{[(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)]}:$$

questa ci da le tre seguenti condizioni

$$[(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)]>0 \ldots (I)$$

$$[(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)]=0 \ldots (II)$$

$$[(BD-2AE^2)-(B^2-4AC)(D^2-4AF)]<0 \ldots (III)$$

78. Allorchè ha luogo l' equazione (I), la radice dell'equazione (N) sono reali, e diseguali; siano dunque $x=\alpha, x=\alpha+\iota$; l' equazione (M) diverrà

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\mp\frac{1}{2A}\sqrt{[(B^2-4AC)(x-\alpha)(x-[\alpha+\iota])]}.$$

Ciò posto la quantità $(x-\alpha)(x-[\alpha+\iota])$ potrà essere o positiva, o negativa; s' è positiva, il radicale diverrà imaginario nell' ipotesi di $B^2-4AC<o$, e reale nell' altra di $B^2-4AC>o$; se poi è negativa, le radici dell' equazione generale saranno reali se si ha $B^2-4AC<o$, ed imaginarie, quando ha luogo la condizione $B^2-4AC>o$. Dunque quando hanno luogo le due condizioni.

$$(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)>o,$$
$$(B^2-4AC)<o,$$

l' equazione generale costruirà una curva chiusa, tutte le volte che si prenderà un' ascissa x maggiore di α, e minore di $\alpha+\iota$, ed all' opposto, giacchè in questo caso il prodotto $(x-\alpha)(x-[\alpha+\iota])$ sarà negativo. Che se si prende un ascissa x maggiore insieme di α, e di $\alpha+\iota$, quel prodotto sarà positivo, e non vi sarà più curva; i valori dunque di α, e di $\alpha+\iota$ segneranno i limiti della curva. Queste considerazioni sono analoghe a quelle del (n.60.) Parimente quando hanno luogo le due condizioni

$$(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)>o,$$
$$(B^2-4AC)>o,$$

l' equazione generale costruirà l' iperbole tutte le volte che x sorpassa i limiti $\alpha, \alpha+\iota$, giacchè in questo caso quel prodotto è positivo; dentro di questi limiti la curva sarà imaginaria. Dando ad x,

ed ad $x+s$ i loro corrispondenti valori, si otterranno le seguenti condizioni analiticamente espresse

condizioni costanti

$$A..\begin{cases}(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)>0\\ B^2-4AC<0\end{cases}$$

$$B...\left\{\begin{array}{l}\left[x+\frac{BD-2AE}{B^2-4AC}-\frac{1}{B^2-4AC}\sqrt{[(BD-2AE)^2-}\right.\\ \left.\qquad (B^2-4AC)(D^2-4AF)]\right]\\ \left[x+\frac{BD-2AE}{B^2-4AC}+\frac{1}{B^2-4AC}\sqrt{[(BD-2AE)^2-}\right.\\ \left.\qquad (B^2-4AC)(D^2-4AF)]\right]\end{array}\right\}<0$$

Quando hanno luogo nel tempo stesso queste tre condizioni, l' equazione generale (1) costruirà una curva chiusa; se la condizione (B) non ha luogo, ma invece un tal prodotto è >0, tuttochè abbiano luogo le condizioni (A), l'equazione generale (1) sarà impossibile

condizioni costanti

$$A'..\begin{cases}(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)>0\\ B^2-4AC>0\end{cases}$$

$$B'...\left\{\begin{array}{l}\left[x+\frac{BD-2AE}{B^2-4AC}-\frac{1}{B^2-4AC}\sqrt{[(BD-2AE)^2-}\right.\\ \left.\qquad (B^2-4AC)(D^2-4AF)]\right]\\ \left[x+\frac{BD-2AE}{B^2-4AC}+\frac{1}{B^2-4AC}\sqrt{[(BD-2AE)^2-}\right.\\ \left.\qquad (B^2-4AC)(D^2-4AF)]\right]\end{array}\right\}>0$$

Quando hanno luogo nel tempo stesso queste tre condizioni, l' equazione generale (ι) costruirà un' iperbole. Se poi la condizione (B') non ha luogo, ma invece un tal prodotto è <0, tuttochè abbiano luogo le altre A', l' equazione generale (ι) sarà impossibile.

79. Supponiamo ora, che abbia luogo la condizione (II); allora le radici dell' equazione (N) saranno ambidue eguali, e si avrà $x=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}$ per cui i due fattori dell' equazione (N) $(x-n)$ $(x-[n+\iota])$ diverranno $(x-n)(x-n)=(x-n)^2$, e l' equazione (M) diverrà

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{(x-n)}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)}.$$ Ciò posto o colla condizione (II) ha insieme luogo la condizione $(B^2-4AC)<0$. o l' altro $(B^2-4AC)>0$; nel primo caso le radici dell' equazione (M) saranno imaginarie, e l' equazione sarà impossibile; nel secondo poi esse saranno reali: Per vedere qual linea costruisce l' equazione in tal caso, mettiamo l' equazione

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{\iota}{2A}(x-n)\sqrt{(B-4AC)}$$

sotto la forma

$$y=\left[\frac{\pm\sqrt{[(B^2-4AC)-B]}x}{2A}+\frac{(n\sqrt{(B^2-4AC)}-D}{2A}\right].$$

mettiamo il coefficiente di x eguale ad a, e la quantità costante eguale a b, si avrà $y=\pm ax+b$, cioè $y=ax+b$, ed $y=-ax+b$, che sono l' equazioni di due rette non parallele (28): dunque nella

2.ª ipotesi l' equazione generale costruirà due rette non parallele.

Quando hanno insieme luogo le condizioni (II), e $B^2-4AC<0$, se mai si abbia ancora $x=n$, ossia se si prenda un ascissa eguale ad una di quelle radici eguali, allora l' equazione (M) si ridurrà ad $y=-\frac{Bx+D}{2A}$, ed in tal caso la curva si riunirà sopra un punto preso sul suo diametro, e l' equazione generale costruirà un tal punto, le cui coordinate sono $x=n$, ed $y=-\frac{Bx+D}{2A}$: infatti è quest' ultima l' equazione del diametro (53)

Dunque le condizioni

$$(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)=0$$
$$(B^2-4AC)<0$$

rendono impossibile l' equazione generale, o riducono la curva ad un punto preso sul suo diametro, allorchè si ha $x=n$.

E le condizioni

$$(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)=0$$
$$(B^2-4AC)>0$$

riducono l' equazione generale (t) a costruire due rette non parallele.

80. Esaminiamo ora il caso, in cui ha luogo la condizione (III); allora essendo negativa la quantità $(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)$, sarà imaginaria l' espressione

$$\sqrt{[(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)]},$$

e le radici dell' equazione (N) saranno imaginarie . Ciò posto facciamo

$$B^2-4AC=\alpha,(BD-2AE)=\beta,(D^2-4AF)=\gamma\ ,$$

la condizione (III) verrà espressa da $\beta<\sqrt{\alpha\gamma}$; quindi a più forte ragione sarà $\beta<2\sqrt{\alpha\gamma}$; sia $\beta=2\sqrt{\alpha\gamma}-k$; questo valore di β sostituiscasi nell' equazione (N), che in questo caso diviene $\alpha x^2\pm\beta x+\gamma$; dando a β il doppio segno , essa diverrà $\alpha x^2\pm 2x\sqrt{\alpha\gamma}+\gamma\mp kx$: questa si scioglie nelle due

$$(\sqrt{\gamma}+x\sqrt{\alpha})^2-kx,(\sqrt{\gamma}-x\sqrt{\alpha})^2+kx\ ;$$

in ambidue quest' espressioni possiamo dare ad x il doppio segno $\pm$: se diamo alla x il segno $-$ nella prima , e 'l segno $+$ nella seconda , amendue saranno positive , come aggregato di due quantità positive , giacchè la quantità $(\sqrt{\gamma}\pm x\sqrt{\alpha})^2$, essendo un quadrato , è essenzialmente positiva : che se diamo ad x il segno $+$ nella prima e 'l segno $-$ nella seconda , ambidue diverranno $(\sqrt{\beta}+x\sqrt{\alpha})^2-kx$: or bisogna riflettere , che essendo $\beta=2\sqrt{\alpha\gamma}-k$, sarà $\beta+k=2\sqrt{\alpha\gamma}$, e quindi $k<2\sqrt{\alpha\gamma}$, e $kx<2x\sqrt{\alpha\gamma}$, e maggiormente $kx<\gamma+2x\sqrt{\alpha\gamma}+\alpha x^2$, ossia $kx<(\sqrt{\gamma}+x\sqrt{\alpha})^2$, cosicchè , essendo $(\sqrt{\gamma}+x\sqrt{\alpha})^2$ una quantità essenzialmente positiva , l' espressione $(\sqrt{\gamma}+x\sqrt{\alpha})^2-kx$ sarà parimente positiva ; dunque nella $n.^a$ ipotesi di $\beta<\sqrt{\alpha\gamma}$ la quantità $\alpha x^2\pm 2x\sqrt{\alpha\gamma}+\gamma\mp kx$, ossia $\alpha x^2\pm\beta x+\gamma$ è sempre positiva . Ciò posto o si ha $B^2-4AC<0$, o $B^2-4AC>0$: nel primo caso la quantità $(B^2-4AC)(x^2+2\,\frac{BD-2AE}{B^2-4AC}x+\frac{D^2-4AF}{B^2-4AC}$ sarà negativa , e nel secondo positiva ;

quindi nel primo caso le radici dell' equazione (M) saranno imaginarie, e l' equazione generale (1) si renderà impossibile; nel secondo poi saranno reali, e l' equazione generale (1) si rapporterà all' iperbole.

Nell' iposesi di $(B^2-4AC)<o$, affinchè abbia anche luogo la condizione (III), fa d' uopo che si abbia ancora $D^2-4AF<o$, giacchè la quantità $(BD-4AE)^2$ essendo positiva, perchè quadrato, la quantità

$$-(B^2-4AC)(D^2-4AF)$$

non sarà negativa se non quando alla condizione $B^2-4AC)<o$ si accoppia l' altra $(D^2-4AF)<o$; è chiaro che questa condizione rientra nell' altra (III), cosicchè potremo stabilire, che l' equazione generale (1) non ha veruna significazione, allorchè hanno insieme luogo le condizioni

$$B^2-4AC)<o$$
$$(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)<o,$$

e ch' ella al contrario ri rapporta all' iperbole, quando si avverano le due condizioni

$$(B^2-4AC)>o$$
$$(BD-2AE)^2-(B^2 4AC)(D^2-4AF)<o.$$

81. Veniamo ora ad esaminare l' equazione generale (1) dietro la condizione

$$(B^2-4AC)=o,$$

per osservare quando essa è impossibile, e quando costruisce delle rette.

In tal ipotesi l' equazione (M) diverrà $y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{[2(BD-2AE)}\left(x+\frac{D^2-4AF}{2BD-4AE}\right)$

supponiamo $\frac{D^2-4AF}{2BD-4AE}=-n$ il radicale di questa espressione diverrà

$$\surd[2(BD-2AE)(x-n)]:$$

allora o si ha

$$BD-2AE>0,$$

o pure

$$BD-2AE<0.$$

Nel primo caso il radicale sarà reale, finchè si avrà $x>n$; sarà nullo, quando si prenderà $x=n$ cioè la curva si ridurrà ad un punto preso sul diametro, e diverrà imaginario, se sarà $x<n$. Questo ci dimostra, che in tal ipotesi, a partire da un' ascissa $x=n$, ove la parabola incontra il diametro, la curva avrà due rami infiniti dalla parte della x positive corrispondenti ad un' ascissa maggiore di n, e che dalla parte opposta non ci corrisponderà verun ramo di curva. Che se si ha $BD-2AE<0$; allora, poicchè quel radicale diviene imaginario quando si ha $x>n$, reale, quando è $x<n$, e nullo quando è $x=n$, ne segue, che in questo secondo caso la curva avrà due ram' infiniti dalla parte delle x negative a partire da un' ascissa $x=n$, il che è analogo a ciocchè si è detto (72).

82. La quantità $BD-2AE$ può essere ancora eguale a zero, in tal ipotesi l' equazione (M)

diverrà $y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\surd(D^2-4AF)$;

facciamo $-\frac{B}{2A}=a$, ed $\frac{1}{2A}[\surd(D^2-4AF)-D]=b$,

l' equazione ultima diverrà

$$y=ax\pm b\,,\ \text{ossia}\ y=ax+b\,,\ y=ax-b\,,$$

equazioni che costruiranno due rette parallele per l' indentità del coefficiente di x (28). Questo ha luogo allorchè si ha $D^2-4AF>0$; che se sarà $D^2-4AF=0$, le due rette si confonderanno in una sola caratterizzata dall' equazione

$y=-\frac{Bx+D}{2A}$; e se è $D^2-4AF<0$, l' equazione sarà impossibile. Dunque riunendo tali condizioni sotto un colpo d' occhio, avremo

$B^2-4AC=0$:

- $BD-2AE>0$: la curva sarà reale, ed avrà due rami infiniti dalla parte delle x positive
- $BD-2AE<0$: la curva sarà reale, ed avrà due rami infiniti dalla parte delle x negative
- $BD-2AE=0$:
  - $D^2-4AF>0$: l' equazione (1) costruirà due rette parallele
  - $D^2-4AF=0$: l' equazione (1) costruirà una sola retta
  - $D^2-4AF<0$: l' equazione (1) sarà impossibile

83. Profittiamo della $n.^a$ discussione per la costruzione delle linee di 2.° grado dietro le loro equa-

zioni. Questa parte veniva conosciuta dagli antichi col nome di *luoghi geometrici*, e l'equazioni venivano chiamate *locali*. Noi l'eseguiremo dietro le idee che abbiamo precedentemente stabilite. E sulle prime si è veduto al di sopra (52, 53, 55, 56) che colle due operazioni di rimuovere il sistema delle primitive coordinate x,y in altro x',y' parallelo a se stesso, ed indi di cambiare questo secondo sistema in un altro x'',y'' perpendicolare si otteneano le tre condizioni (58) $B=0$, $D=0$, $E=0$ per rapportare la curva agli assi primarj. Con queste trasformazioni l'equazione generale, dando a P, M, e Q i loro valori (52,60), si è ridotta sotto la forma

$$\left.\begin{array}{l}[A\cos^2(x'',x')-B\cos(x'',x')\text{sen}(x'',x')+\\ \qquad C\text{sen}^2(x'',x')]y''^2+\\ {}[A\text{sen}^2(x'',x')+B\text{sen}(x'',x')\cos(x'',x')+\\ \qquad C\cos^2(x'',x')]x''^2+\\ (F-Ab^2-Bab-Ca^2-Db-Ea)=0.\end{array}\right\}\ldots(m)$$

Da tuttociò che precedentemente si è detto, è chiaro, che tutto l'impegno consiste a determinare in funzione de' coefficienti indeterminati A, B, C, D, E, F le quantità $\text{sen}(x'',x')$, $\cos(x'',x')$, ed $(F-Ab^2-Bab-Da^2-Db-Ea)$: allora determinati colla sostituzione i coefficienti di y^2, ed x^2 in funzione de' medesimi coefficienti generali A, B, ..., si ritroveranno i valori de' semiassi al fare alternativamente $y=0$, ed $x=0$: in seguito determinando il centro della curva per mezzo delle coordinate

$$a=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC},\ \text{e}\ b=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC}\ (59)$$

prese sù psimitivi assi delle x, ed y, non resta chè ad inclinare dal centro sull' asse delle ascisse una retta sotto l' angolo corrispondente a sen (x'',x')(43,47), tagliare su di questa una parte eguale all' asse maggiore già determinato, ed indi elevare su di questo dallo stesso centro una perpendicolare eguale all' asse minore : la curva descritta con questi assi sarà la curva richiesta.

Or le quantita sen (x'',x'), cos(x'',x') le abbiamo determinate al di sopra (69), ed avendone ivi sostituiti i valori ne' coefficienti di y''^2, e di x''^2, che abbiamo indicati co' simboli Q, e P, abbiamo ottenuto

$$\left.\begin{array}{l} Q=\frac{1}{2}(C+A)-\frac{1}{2}\sqrt{[(C-A)^2+B^2]} \\ \text{e } P=\frac{1}{2}(C+A)+\frac{1}{2}\sqrt{[(C-A)^2+B^2]} \end{array}\right\} \ldots(k)\ (a)$$

(a) Ecco come si porrebbero in altro modo determinare i valori di sen (x'',x'), cos(x'',x') e quindi di P, e Q. Si prenda la quantità (60 pag. 57)

$2(A-C)\text{sen}(x'',x')\cos(x'',x')+B(\cos^2(x'',x')-\text{sen}^2(x'',x'))=0$, ch' è il coefficiente di $x''y''$ nella trasformata (4, pag 57), e ch' è risultata dalla condizione di fare svanire il termine in $x''y''$. Essa ci da

$$(A-C)\text{sen}2(x'',x')+B.\cos2(x'',x')=0 \text{(trigonom. 30)},$$

da cui si tira $\text{tang}2(x'',x')=\frac{B}{C-A}$. Ciò posto si sa essere

(trigonom. 11) $\cos a=\frac{1}{\text{seg}a}=\frac{1}{\sqrt{(1+\text{tang}^2 a)}}$; ma per esser $\frac{\text{sen}a}{\cos a}=\text{tang}a$,

è $\text{sen}a=\text{tang}a\cos a=\text{tang}a.\frac{1}{\text{seg}a}=\frac{\text{tang}a}{\sqrt{(1+\text{tang}^2 a)}}$; dunque, sostituendo

ne' valori di sen2(x'',x'), e cos2(x'',x'), il valore di tang2(x'',x'), si avrà

$$\cos2(x'',x')=\frac{1}{\sqrt{(1+\text{tang}^2 2(x'',x'))}}=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{B^2}{(C-A)}\right)}}=$$

$$\frac{C-A}{\sqrt{(C-A)^2+B^2}}\ldots(m), \text{ e } \text{sen}2(x'',x')=\frac{\text{tang}2(x'',x')}{\sqrt{(1+\text{tang}^2 2(x'',x'))}}=$$

84. Per determinare ora in funzione degli stessi coefficienti la quantità

$$-F+Ab^2+Bab+Ca^2+Db+Ea\ldots(n),$$

$\frac{B}{\sqrt{(C-A)^2+B^2)}}$ . . . (n); ma è sen$(x'',x') = \frac{\sqrt{.R^2 - R\cos 2(x'',x')}}{2}$ (trigonom. 32), dunque sarà sen$_2(x'',x') = \frac{R^2}{2} - \frac{R}{2}\cos 2(x'',x')$, ove, sostituendo il valore di $\cos 2(x'',x')$, sarà sen$_2(x'',x') = \frac{1}{2}$

$- \frac{C-A}{\sqrt{(C-A)^2+B^2)}}$ . . . (p); similmente essendo $\cos 2(x'',x') = \frac{R^2}{2} + \frac{R}{2}\cos 2(x'',x')$ (trigonom. 32), sarà $\cos 2(x'',x') = \frac{1}{2} +$

$\frac{1}{2}\frac{C-A}{(\sqrt{(C-A)^2+B^2)}}$ . . (q). Nell'equazione (m) si sostituiscano nel coefficiente di y^2 i valori (n), (p), e (q), ben inteso, ch'essendo

$$\text{sen}2(x'',x') = 2\,\text{sen}(x'',x')\cos(x'',x') = \frac{B}{\sqrt{(C-A)^2+B^2)}},$$

sarà sen$(x'',x')\cos(x'',x') = \frac{B}{2\sqrt{(C-A^2+B^2)}}$ fatte le riduzioni, il coefficiente di y''^2 diverrà

$\frac{C+A}{2} - \frac{\sqrt{((C-A)^2+B^2)}}{2}$ . . . . (r): similmente sostituiti nel coefficiente di x''^2 i medesimi valori, questo diverrà $\frac{C+A}{2} + \frac{\sqrt{(C-A)^2+B^2}}{2}$ allora determinata come quì sopra la quantità

$-(F-Ab^2-Bab-Ca^2-Db-Ea)$ . . . l'equazione (m) diverrà

$$\left(\frac{(C+A)}{2} - \frac{\sqrt{(C-A)^2+B}}{2}\right)y''^2 +$$

$$\left(\frac{(C+A)}{2} + \frac{\sqrt{(C-A)+B)}}{2}\right)x''^2 +$$

$$\left(\frac{CD^2-EBD+AE^2-F(B^2-4AC)}{B^2-4AC}\right) = 0$$

moltiplichiamo per a la quantità $2Ca+Bb+E=0$, ch' è il cofficiente di $x'(52,(2))$, e per b l' altra

$$2Ab+Ba+D=0$$

coefficiente di y' nella stessa equazione, e che sono l' equazioni di condizione per fare svanire i termini in x', ed y' (52); sommando i risultati, si avrà

$$2Ca^2+2Bab+Ea+2Ab^2+bD=0,$$

da cui si ottiene

$$Ca^2+Bab+Ab^2=-\frac{Ea}{2}-\frac{bD}{2},$$

valori, che sostituiti nell' espressione (n), la cambiano in $\frac{Ea+Db}{2}-F$, nella quale sostituiti i valori di a e b (57 pag.53), l' espressione (n) in fine diverrà

$$\frac{CD^2-EBD+AE^2-F(B^2-4AC)}{B^2-4AC} \ldots (n').$$

Allora sostituite in (m) l' espressioni (k), ed (n'), essa diverrà

$$\left[\frac{(A+C)}{2}-\frac{\sqrt{[(C+A)^2+B^2]}}{2}\right]y''^2+$$

$$\left[\frac{(A+C)}{2}+\frac{\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}}{2}\right]x''^2+$$

$$+\frac{CD^2-EBD+AE^2-F(B^2-4AC)}{B^2-4AC}=0 \ldots (m')$$

85. Per avere ora i valori degl'i assi, indichia-

moli con $2a'$, e $2b'$, per distinguerli dal coordinate al centro, che abbiamo chiamate a, e b: facciamo successivamente $y=0$, ed $x=0$; si avrà

$$a'^2=\frac{-2(CD^2-EBD+AE^2-F[B^2-4AC])}{(B^2-4AC)(A+C+\sqrt{[(C-A)^2+B^2]})}\ldots(S),\text{ e}$$

$$b'^2=\frac{-2(CD^2-EBD+AE^2-F[B^2-4AC])}{(B^2-4AC)(A+C-\sqrt{[(C-A)^2+B^2]})}\ldots(T):$$

quindi si avranno i valori di $2a'$, e $2b'$, e si costruirà con questi assi la curva.

86. Se mai è $a'=b'$; allora i fratti saranno eguali, e poichè i numeratori di essi sono identici, dovranno ancora essere egual' i denominatori; quindi dividendo ambidue per B^2-4AC, si avrà

$$A+C+\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}=A+C-\sqrt{[(C-A)^2+B^2]},$$

ossia

$$2\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}=0,$$

il che ci da

$$(C-A)^2+B^2=0;$$

or poichè la somma di due quadrati non può esser nulla, fa d' uopo, per reggere questa equazione, che sia separatamente $(C-A)^2=0$, $B^2=0$, da cui si ha $C=A$, e $B=0$. Quando i due assi sono eguali, l' ellisse si cambia in cerchio, come abbiamo veduto (61), e l' iperbole in *iperbole parilatera*. Le condizioni dunque che riguardono il cerchio, sono

$$B^2-4AC<0,\ B=0,\ A=C,$$

e quelle, che riguardano l' iperbole parilatera, sono

$$B^2-4AC>0,\ B=0,\ A=C;$$

cioè l' equazione generale (1) si rapporterà al cerchio, se mancando B,A, e C siano eguali; ed effetti dallo stesso segno; ed essa si rapporterà all iperbole parilatera, quando, mancando B,A, e C sono eguali, ed affetti da diverso segno, giacchè avverandosi queste condizioni, nel primo caso la quantità B^2-4AC è negativa, e nel secondo positiva.

87. Per maggior chiarezza, applichiamo queste teorie a degli esempii.

Sia l'equazione

$$3y^2+7xy+5x^2+5y+5x-7=0.$$

Poicchè questa equazione soddisfa alla condizione $B^2-4AC<0$, ed alla condizione (1) (77), non essendo d'altronde (prec.) $B=0$, ed $A=C$, essa costruirà un ellisse: Paragonando sulle prime i coefficienti numerici à coefficient' indeterminati, si avrà

$$A=3, B=7, C=5, D=5, E=5, F=7;$$

e poicchè il numero 7 è affetto da segno diverso da quello di A, e C, l' origine dalle coordinale sarà dentro la curva, e le ordinate dovranno prendersi in parte opposta (74). Siano dunque AX, AY i due assi coordinati, a' quali si rapporta la curva: per determinarne il centro si sostituiscano invece de' coefficienti indeterminati, i numerici corrispondenti ne' valori di a, e b, che sono (52, pag. 52) le coordinate al centro; si avrà

Fig 9

$$a=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}=\frac{5}{11}, \text{ e } b=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC}=-\frac{15}{11}:$$

allora, presa dalla parte delle x positive una ret-

la $AP=\frac{5}{11}$, e dalla parte delle y negative una retta $PC=\frac{15}{11}$, il punto C determinato da queste due coordinate sarà il centro della curva, Dippiù si ha

$$\text{sen}^2(x'',x')=\tfrac{1}{2}-\frac{C-A}{2\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}}=\tfrac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{53}},$$

ossia, estraendo la radice da 53, limitando ci ad una sola cifra decimale, sarà

$$\text{sen}^2(x'',x')=\tfrac{1}{2}-\frac{1}{7.2}=\frac{5.2}{14.4}=\frac{52}{144}=\frac{26}{72};$$

quindi si avrà

$\text{sen}(x'',x')=\sqrt{\frac{26}{72}}$, e prendendo i logaritmi, sarà $\log\,\text{sen}(x'',x')=\tfrac{1}{2}(\log 26-\log 72)=-0\ 22118$; e facendo il raggio eguale a 1000000, quel logaritmo negativo calcolato primieramente col raggio 1 diverrà positivo, ed eguale a 9.77882, a cui molto approssimativamente vi corrisponde l' arco di $36.56'.10''.5$, arrestandoci al primo decimale, e riducendo il decimale a minuti terzi si avrà

$$\text{arc}.\text{sen}\,(x'',x')=36.^\circ\ 56'.10''.30'''.$$

Ciò posto si determinino i valori di a', e b', sostituendo in (S), e (T) i valori de' coefficienti, si avrà $a'=\sqrt{\frac{204}{167.2}}$, e $b'=\sqrt{\frac{204}{8.8}}$. Allora dal centro C della curva s' inclini una retta CR, che faccia coll' asse XX' delle ascisse un angolo

di $36°$, $56'$. $10''$, $30'''$, ed elevata su di questa retta dallo stesso centro R' una perpendicolare CS, si tagli

$$RR' = 2\sqrt{\frac{204}{8.8}}, \text{ed } SS' = 2\sqrt{\frac{204}{167.2}}$$

e co' due assi RR', ed SS' si descriva la curva, che sarà il luogo geometrico dell' equazione

$$3y^2+7xy+5y^2+5y+5x-7=0,$$

il che è chiaro (83).

88. L' equazione

$$3y^2+7xy-5x^2+5y+5x-7=0,$$

o l' altra

$$-3y-+7xy+5x^2+5y+5x-7=$$

si rapporta ad un' iperbole, che si costruirà nello stesso modo.

89. Abbiamo finora indicato il modo di costruire le curve a centro: andiamo ora a rilevare dietre i numeri 70, 71, e 72, le formole per costruire la parabola. Sulle prime nell' ipotesi presente si ha (70) $A+C=\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}$: questo valore di $\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}$ sostituiscasi ne' valori di

$$\text{sen}^2(x'',x'), \text{ e di } \cos^2(x'',x');$$

si avrà

$$\text{sen}^2(x'',x') = \frac{1}{2} - \frac{C-A}{2\sqrt{([C-A)^2+B^2]}} (69) =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{C-A}{2(C+A)} = \frac{2A}{C+A}, \text{ e } \cos^2(x'',x') =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{C-A}{2\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}} = \frac{1}{2} + \frac{C-A}{2(C+A)} = \frac{2C}{C+A}.$$

e si avrà (trigon 11)

$$\tang(x'',x')=\sqrt{\frac{A}{C}}.$$

Quindi essendo

$$P=\tfrac{1}{2}[(C+A)+\tfrac{1}{2}\sqrt{[(C-A)^2+B^2]},$$

$$\text{e } Q=\tfrac{1}{2}(C+A-\tfrac{1}{2}\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}\ (69),$$

si avrà nella $n.^a$ ipotesi $P=A+C$, e $Q=0$, come si è osservato (70), cosicchè combinate queste condizioni con quella di fare svanire il termine Bxy dell' equazione generale, abbiamo ridotta questa sotto la forma

$$Px'^2+[D\text{sen}(x',x)+E\cos(x',x)]x'+$$
$$[D\cos(x',x)-E\text{sen}(x',x')]y'-F=0\ (71\ (p');$$

mettiamo in quest' equazione i valori di

$$P,\text{sen}(x',x'),\cos(x',x)\ (a),$$

essa diverrà

$$(A+C)x'^2+\frac{D\sqrt{A}+E\sqrt{C}}{\sqrt{(C+A)}}x'+\frac{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}{\sqrt{(C+A)}}y'-F=0.$$

Questa equazione rappresentata al di sopra per

$$Px'^2-Ry'+Sx'+K=0$$

l' abbiamo semplificata trasformando le coordinate in un sistema parallelo al primo, ed abbiamo ottenuto la seguente trasformata

---

(a) Nella discussione delle curve a centro abbiamo prima trasformate le coordinate in un sistema parallelo al primo, e poi in un sistema rettangolare: nella discussione della parabola abbiamo principiato dal trasformare le coordinate in un sistema perpendicolare; per cui si ha $\text{ang}(x'',x')=\text{ang}(x',x)$.

$Px''^2+(2a'P+S)x''+Ry''+Pa'^2+Sa'+Rb'+K=$.

Ciò posto per rilevare i valori di a', e b', stabiliamo le due equazioni di condizione

$$2a'P+S=0\ ,\ Pa'^2+Sa'+Rb'+K=0;$$

la prima ci darà $a'=-\frac{S}{2P}$, valore, che, sostituito nella seconda, ci darà $b'=\frac{S^2}{4RP}-\frac{K}{R}$, cosicchè sostituendo ne' valori di a', e di b' i valori di P, R, S, K, si avrà

$$a'=\frac{D\surd A+E\surd C}{2(A+C)\surd(A+C)}\ ,\ \text{e}\ b'=$$

$$\frac{(D\surd A+E\surd C)^2}{4(A+C)\surd(A+C)(D\surd C-E\surd A)}-\frac{F\surd(A+C)}{D\surd C-E\surd A}.$$

Con queste condizioni l' equazione della parabola diverrà

$$x''^2+\frac{D\surd C-E\surd A}{(A+C)\surd(A+C)}y''=0\ \ldots.\ (p'''):$$

ordinando riguardo ad y, come si è fatto (72), si avrà $y^2+\frac{S}{Q}x=0$; sostituendo i valori di S, e Q (88) (a), si avrà

$$y^2=\frac{D\surd A+E\surd C}{(A+C)\surd(A+C)}x=0\ldots(p'')$$

Quindi è chiaro, dietro tuttocciò, che abbiamo detto, che data l' equazione ad una parabola, si descriverà la curva, inclinando all' asse delle

(a) In questo caso il valore di P (69) compete a Q; ed all'opposto.

ascisse dall' origine degli assi coordinati una retta sotto un angolo, che abbia per tangente $\sqrt{\frac{A}{C}}$:
allora prendendo questa retta, e la perpendicolare elevata su di essa per nuovi assi coordinati, o tagliando su di esse le coordinate alla nuova origine

$$a'=\frac{D\sqrt{A}+E\sqrt{C}}{2(A+C)\sqrt{(A+C)}}\text{, e } b'=$$

$$\frac{(D\sqrt{A}+E\sqrt{C})^2}{4(A+C)\sqrt{(A+C)}(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}-\frac{F\sqrt{(A+C)}}{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}},$$

la parallela, che da questa nuova origine si menerà alla retta costruita sotto l' angolo della tangente $\sqrt{\frac{A}{C}}$, sarà l' asse della curva, e

$$\frac{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}{(A+C)\sqrt{(A+C)}}$$

sarà il parametro, cosicchè allora si costruirà agevolmente. Diamone un esempio.

90. Sia l' equazione $y^2+2xy+x^2+5y-3x+7=0$, la quale per la condizione $B^2-4AC=0$ appartiene alla parabola, non essendo di vantaggio

$$BD-2AE=0 \text{ (82):}$$

paragonando i coefficienti indeterminati à coefficienti numerici sarà

$$A=1,\ B=2,\ C=1,\ D=5,\ E=-3,\ -F=7;$$

quindi si avrà

$$\text{tang}(x'',x')=\sqrt{\frac{A}{C}}=1$$

e per conseguenza sarà

$$\text{ang}(x'', x') = 45^\circ (\textit{trigon.}\ 17)\ ;$$

Dippiù si avrà

$$a' = \frac{D\sqrt{A} + E\sqrt{C}}{2(A+C)\sqrt{(A+C)}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ ;\ \text{e}\ b' =$$

$$\frac{(D\sqrt{A} + E\sqrt{C})^2}{4(A+C)\sqrt{[A+C]}(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})} -$$

$$\frac{F\sqrt{(A+C)}}{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}} = \frac{29}{16\sqrt{2}}\ \text{e}\ p = \frac{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}}{(A+C)\sqrt{(A+C)}} = \frac{4}{\sqrt{2}},$$

e riducendo a', b', p ad aver lo stesso denominatore sarà

$$a' = \frac{8}{16\sqrt{2}},\ b' = \frac{29}{16\sqrt{2}},\ \text{e}\ p = \frac{64}{16\sqrt{2}};$$

quindi sarà $a' : b' : p = 8 : 29 : 64$. Ciò posto poicchè la $n.^a$ equazione soddisfa alla condizione

$$BD - 2AE > 0\ (a),$$

la parabola, ch' essa costruirà sarà indefinita dal-

(a) Abbiamo osservato al di sopra (72), che nell' equazione $y^2 = px$, secondocchè p era positivo, o negativo, la parabola si estendea indefinitivamente dalla parte della ascisse positive, o negative; questa condizione di p rientra nell' altra $BD - 2AE >$, o < 0. come abbiamo cennato (81). Queste condizioni sono identiche: infatti, essendo

$$F = \frac{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}}{2(A+C)\sqrt{(A+C)}}$$

ed essendo $B = 2\sqrt{AC}$ per la condizione $B^2 - 4AC = 0$, se noi mettiamo la condizione $BD - 2AE >$, o < 0 sotto la forma

$$2D\sqrt{A}\sqrt{C} - 2E\sqrt{A}\sqrt{A} >,\ 0\ <0,$$

la parte delle ascisse positive (82): dippiù, essendovi il termine costante, ed avendo lo stesso segno de' coefficienti di y^2, ed x^2, l' origine del primitivo sistema sarà fuori della curva [74]. Per costruirla siano i due assi $A'X'$, $A'Y'$ rettangolari: si divida l' angolo $Y'A'X'$ per metà, saranno $A'X''$, $A'Y''$ i nuovi assi rettangolari; sù nuovi assi $A'X''$, $A'Y''$ si prendano le due coordinate $A'F$, FA, che siano tra loro come 8 : 29, e sarà A l'origine della curva, che si descriverà col parametro $6\frac{1}{4}$, come in appresso vedremo. L' equazione

$$y^2+2xy+x^2-5y-3x+2=0$$

costruirà l'altra parabola $M'AN'$, essendo

$$BD-2AE<0.$$

CAPO V.

Cerchio.

91. **Abbiamo** osservato al di sopra, che il cerchio è della famiglia dell' ellissi, e che la sua equazione, contando le ascisse rettangolari dal centro è $y^2+x^2=a^2$, la quale da $a=\sqrt{(x^2+y^2)}$. La quantità $\sqrt{(x^2+y^2)}$ non è che l' ipotenusa di un triangolo rettangolo, i cui catetti sono x, ed y, os-

---

riducendo questa, sarà

$$DVC-EVA>, o <0,$$

ed allora nel primo caso p sarà positivo, e nel secondo negativo. Abbiamo considerata nell' equazione (p'''), x''^2 nel primo membro, e l' altra quantità nel secondo, giacchè le condizioni $BD-2AE>$, o <0 si sono rilevate nell' equazione generale, in cui l' incognita si è assolata (81).

sia le coordinate à punti della circonferenza: dunqu' essa esprime la distanza di questi punti dall' origine, o sia dal centro, la quale poichè è costante, ne segue, che il centro di questa curva serba egual distanza da tutt' i punti del suo perimetro, proprietà, che d' altronde conosciamo dalla Geometria.

92. La quantità costante a chiamasi raggio del cerchio.

93. Quindi se si domanda trovar l' equazione a quella curva, che ha la proprietà di aver un punto dentro di essa egualmente distante da ciascun punto del suo perimetro; preso questo punto per origine delle coordinate, e chiamando a la distanza costante dell' origine C da ciascun punto della circonferenza, ed x, y le coordinate CO, OF ad un punto F, il triangolo rettangolo COF ci darà $a^2 = y^2 + x^2$, ch' è appunto l' equazione del cerchio. Fig 7.

94. Generalizziamo queste cose, e fissiamo l'origine delle coordinate rettangolari ad un punto qualunque A': si chiamino a, b le coordinate AP, PC al centro C, ed x, y le coordinate variabili AS, SF ad un punto qualunque F della circonferenza, ed uniamo la FC; sia R il raggio di questo cerchio, si avrà $R^2 = CO^2 + OF^2$; ma è $CO = AS - AP = x - a$, ed $OF = SF - PC = y - b$, dunque, sostituendo si avrà $R^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$ . . . (T) equazione generale al cerchio.

95. Se l' origine A' la trasportiamo al centro, si avrà $a=0$, $b=0$, e l' equazione (T) diverrà $R^2 = x^2 + y^2$, simile a quella, che quì sopra abbiamo trovata direttamente; e se la trasportiamo ad un punto qualunque B della circonferenza, si avrà $a=R$, e $b=0$, e con tali cambiamenti l' equazione (T) diverrà $y^2 = 2Rx - x^2$, equazione al cer-

chio, fissando l' origine delle coordinate ad un punto qualunque del suo perimetro.

96. In fatti chiamando AO, x'; ed essendo $CO=AC-AO$, ossia $x=R-x'$, se questo valore di x si sostituisca nell' equazione $R^2=y^2+x^2$, si avrà $y^2=2Rx-x^2$, ch'è la stessa di quella in cui si è trasformata l' equazione (T), facendo $a=R$, e $b=0$, ossia trasportando l' origine sulla curva.

97. Sviluppiamo l' equazione (T); si avrà

$$y^2-2by+b^2+x^2-2ax+a^2-R^2=0,$$

paragoniamola coll' equazione generale (1) posta sotto la forma

$$y^2+\frac{B}{A}xy+\frac{C}{A}x^2+\frac{D}{A}y+\frac{E}{A}x-\frac{F}{A}=0\text{; si avrà}$$

$$B=0,\ \frac{C}{A}=1\text{; }-2b=\frac{D}{A},\text{ e quindi } b=-\frac{D}{2A}\text{;}-2a=\frac{E}{A}$$

e perciò $a=-\dfrac{E}{2A}$.

Dunque $B=0$, e $\dfrac{C}{A}=1$, ossia $C=A$ sono le due equazioni di condizione, perchè l' equazione generale (1) si rapporti al cerchio, il che è analogo a ciocchè si è detto al di sopra (86). Allora le coordinate al centro di questo sono $-\dfrac{E}{2A}$, e $-\dfrac{D}{2A}$.

98. Questo può dimostrarsi direttamente nel seguente modo cioè supponiamo $B=0$, e $C=A$, l' equazione generale (1) diverrà

$y^2+x^2+\dfrac{D}{A}y+\dfrac{E}{A}x-\dfrac{F}{A}=0$. Si completi riguar-

do ad y, ed ad x, essa diverrà

$$y^2+\frac{D}{A}y+\frac{D^2}{4A^2}+x^2+\frac{E}{A}x+\frac{E^2}{4A^2}=\frac{D^2}{4A^2}+\frac{E^2}{4A^2}+\frac{F}{A}$$

ossia $\left[y+\frac{D}{2A}\right]^2+\left[x+\frac{E}{2A}\right]^2=\frac{D^2}{4A^2}+\frac{E^2}{4A^2}+\frac{F}{A}$,

la quale paragonata all'equazione (T), chiaramente ci dimostra, ch' essa appartiene ad un cerchio, il cui centro resta determinato dalle coordinate

$-\frac{D}{2A}$, $-\frac{E}{2A}$, e 'l cui raggio è

$$\sqrt{\left[\frac{4AF+D^2+E^2}{4A^2}\right]}$$

99. Le condizioni $B=0$, ed $A=C$ esprimono la natura del cerchio: Infatti la condizione $B=0$ appartenendo ad un diametro parallelo all' asse delle x(55), se l' equazione generale si riduce sotto la forma $Ay^2+Cx^2+F=0$, facendo svanire i termini affetti da y, ed x, si vedrà che una tal condizione altro non importa, se non che il diametro parallelo all' asse delle x, o a quello delle y divide per metà le perpendicolari menategli, e prolungate d' ambi le parti fino all' incontro della circonferenza, proprietà essenziale del cerchio, che abbiamo dimostrato nella Geometria (106), e che ci mostra non esservi nel cerchio altri diametri conjugati, che i soli rettangolari, come vedremo in seguito; similmente la condizione $A=C$ saggiata nell' equazione ridotta $Ay^2+Cx^2+F=0$ ci da de' valori identici tanto per l' asse della y, che per quello delle x, il che ci dimostra la simmetria perfetta della curva circolare.

Per rendere queste cose più chiare, diamone un esempio. Sia l'equazione

$$y^2+x^2-7x+5y-3=0,$$

la quale appartiene al cerchio per le condizioni $A=C$, $B=0$. Completata riguardo ad y, ed x ci da $(y+\frac{5}{2})^2+(x-\frac{7}{2})^2=\frac{43}{2}$, la quale paragonata coll' altra $(y-b)^2+(x-a)^2=R^2$ ci da $b=-\frac{5}{2}$, $a=\frac{7}{2}$, ed $R=\sqrt{\frac{43}{2}}$. Quindi, presi due assi rettangolari AX, AY, e tagliata $AO=\frac{7}{2}$ ed $OM'=\frac{5}{2}$, se col centro M', e col raggio $\sqrt{\frac{43}{2}}$ si deseriva un cerchio, sarà questo il luogo geometrico dell' equazione data.

Fig 18

100. Nell' ipotesi di $B=0$, ed $A=C$ non cessa di aver luogo la condizione $B^2-4AC<0$; che appartiene alle linee chiuse di 2° grado.

101. Poicchè l' equazione $y^2+x^2=R^2$ da $y=\pm\sqrt{(R^2-x^2)}$, ed $x=\pm\sqrt{(R^2-y^2)}$, ne segue che ad ogni ascissa CO, Cb vi corrisponderanno sempre due semiordinate eguali, e contrarie OF, OJ; bF, bF': Dunque la curva circolare è simmetrica tanto dall' una, e l' altra parte dall' asse delle y, quanto dall' una, e l' altra parte delle x. Dippiù nelle medesime espressioni $y=\pm\sqrt{(R^2-x^2)}$, ed $x=\pm\sqrt{(R^2-y^2)}$, se facciamo $x=0$, si avrà $y=\pm R$, e se si fa $y=0$, si avrà $x=+R$: Dunque la y va crescendo da zero, che corrisponde ad $x=R$, fino ad R, ove si ha $x=0$: se y oltrepassa questo limite, l' espressione di x diverrà immaginaria: similmente la x va crescendo da zero, che corris-

Fig 6

ponde ad $y=R$, fino ad R, ove si ha $y=0$: al di là di questo limite l' espressione di y diviene imaginaria.

Questo corrisponde alla proprietà, che la curva circolare non può oltrepassare il limite del suo raggio.

102. L' equazione generale al cerchio contiene trè quantità costanti, cioè a, b, R: le prime due essendo le coordinate al centro del cerchio, ne determinano la sua posizione, e 'l raggio R ne determina la grandezza: dunque *tre condizioni si richiedono per determinare ne' casi particolari un cerchio di posizione, e di grandezza.*

103. Quindi se si domanda l' equazione di un cerchio che passa per tre punti, che non siano per diritto, e la cui posizione sia data per mezzo delle rispettive coordinate a ciaschedun di essi, che noi chiameremo (m,n),(m',n'), (m'',n''), è chiaro, che tutto si ridurrà a determinare a, b, ed R in funzione di (m,n),(m',n'),(m'',n''): allora sostituiti questi valori nell' equazione (T), la risultante sarà l' equazione richiesta. Per ciò fare prendiamo l' equazione del cerchio à rispettivi punti (m,n),(m',n'),(m'',n''), si avranno le seguenti tre equazioni

pel punto (m,n),

$$m^2-2am+a^2+n^2-2bn+b^2=R^2 \quad . \; . \; . \; (M)$$

pel punto (m',n'),

$$m'^2-2am'+a^2+n'^2-2bn'+b^2=R^2 \; ... \; (M')$$

pel punto (m'',n''),

$$m''^2-2am''+a^2+n''^2-2bn''+b^2=R^2 ... (M'')$$

Queste trè equazioni, dovendo aver luogo nel tempo stesso, racchiudono le condizioni per determinare le tre quantità a, b, R. Per evitare il

metodo di sostituzione, che in questo caso riuscirebbe lungo, noi adopreremo il metodo di eliminazione; cioè si sottragga dall' equazione (M) primieramente la (M'), e poi la (M''), si sarà così eliminata la quantità R^2, e tra a, b avremo le due equazioni

$$m^2-m'^2+2a(m'-m)+n^2-n'^2+2b(n'-n)=0\ldots(N)$$

$$m^2-m''^2+2a(m''-m)+n^2-n''^2+2b(n''-n)=0\ldots(N'),$$

le quali ordinate rispetto ad a, e b, divengono rispettivamente.

$$2[(m'-m)a+(n'-n)b]+m^2-m'^2+n^2-n'^2=0\ldots\ldots(MN)$$

$$2[(m''-m)a+(n''-n)b]+m^2-m''^2+n^2-n''^2=0\ldots(M'N')$$

Nella prima di esse si chiami p il coefficiente di a, q quello di b, e c le quantità fuori del vincolo; e chiamato parimente p' il coefficiente di a nella seconda, q' quello di b, e c' le rimanenti quantità, l' equazione (MN) diverrà $pa+qb+c=0$, e l' altra $(M'N')$, $p'a+q'b+c'=0$. Allora dalla prima moltiplicata per p' sottrattane la seconda moltiplicata per p si avrà $(p'q-pq')b+p'c-pc'=0$ la quale darà $b=\dfrac{pc'-p'c}{qp'-pq'}$, valore, che sostituito in una di esse, ci darà $a=\dfrac{c'q-cq'}{qp'-pq'}$: allora sostituiti questi valori di a, b nell' equazione (T), la risultante sarà l' equazione richiesta.

104. Tiriamo da queste cose qualche conseguenza. E sulle prime poichè a, e b nell' equazione (MN), $(M'N')$ non oltrapassano il primo grado, ne segue, che il centro del cerchio, che dee insieme

passare pe' punti $(m,n)(m',n')(m'',n'')$ non ha che una sola posizione, cioè esso è un solo, *e quindi per tre punti non vi può passare che un sol cerchio*, proprietà analoga a ciocchè abbiamo dimostrato in Geometria (112).

L' equazioni (M),(M'),(M'') ci dimostrano lo stesso sciolte rispetto ad R^2; cioè poichè il valore di R, che da esse si ottiene è unico, il raggio del cerchio, che dovrà passare per tre punti, sarà un solo.

105. Mettiamo l' equazioni (MN), $(M'N')$ sotto la forma

$$\left(a-\frac{m'+m}{2}\right)(m'-m)+\left(b-\frac{n'+n}{2}\right)(n'-n)=0$$

$$\left(a-\frac{m''+m}{2}\right)(m''-m)+\left(b-\frac{n''+n}{2}\right)(n''-n)=0;$$

la prima darà

$$b-\frac{n'+n}{2}=-\frac{m'-m}{n'-n}\left(a-\frac{m'+m}{2}\right)\ .\ .\ .\ (Mm)$$

e la seconda

$$b-\frac{n''+n}{2}=-\frac{m''-m}{n''-n}\left(a-\frac{m''+m}{2}\right)\ .\ .\ .\ (M'm'),$$

equazioni, le quali paragonate rispettivamente all' equazione $y-n=a(x-m)$, mostrano che appartengono ad una retta condizionata a passare per un punto, in cui le coordinate sono per la prima $\frac{m'+m}{2}$, $\frac{n'+n}{2}$, e per la seconda $\frac{m''+m}{2}$, $\frac{n''+n}{2}$ (33), delle quali la prima fa coll' asse delle ascisse un angolo, la cui tangente è $-\frac{m'-m}{n'-n}$ (27,29) e l'altra fa

collo stesso asse un angolo, che ha per tangente $-\frac{m''-m}{n''-n}$. Or sappiamo d'altronde (37), che l'equazioni delle corde, che passano rispettivamente pe' punti $(m,n),(m',n')$; $(m,n),(m'',n'')$ sono la prima $y-n=\frac{n'-n}{m'-m}(x-m')$, e la seconda $y-n=\frac{n''-n}{m''-m}(x-m'')$, e le condizioni $\frac{n'-n}{m'-m}$, $\frac{n''-n}{m''-m}$ sono rispettivamente quelle delle perpendicolari alle rette costruite dall'equazioni $(Mm),M'm')(37)$; Dunque queste rette dividono rispettivamente per metà le corde, che passano pe' punti $(m,n),(m',n')$; $(m,n)(m''n'')$, e sono anche perpendicolari ad esse. È perciò *il centro di un cerchio che passa per trè punti, trovasi su quelle rette che dividono per metà, ed ad angoli retti le corde, che uniscono due a due quelli punti; e quindi esso è all' intersezione di due perpendicolari menate dà medesimi su queste corde*.

Dunque per far passare un cerchio per trè punti, basterà unire questi a due a due, e da punti medj di queste congiungenti elevarci delle perpendicolari: l' incontro di queste sarà il centro del cerchio richiesto, e la distanza di questo punto d' incontro da uno de' punti dati ne sarà il raggio; e questo è analogo a ciocchè abbiamo dimostrato in Geometria (111).

106. Mettiamo l' equazione $y^2=R^2-x^2$ sotto la forma $y^2=(R+x)(R-x)$, e l' altra $y^2=2Rx-x^2$ sotto la forma $y^2=x(2R-x)$: nel primo caso, essendo $CO=x$, sarà $BO=R+x$; ed $AO=R-x$; e nel secondo, essendo $AO=x$, ed $AB=2R$, sarà

Fig. 7

$BO=2R-x$; e quindi si avrà $(R+x)(R-x)=AO.OB$, ed $x\ (2R-x)=AO.OB$; per cui e l' una, e l' altra equazione ci darà $OF^2=BO.OA$: cioè *nel cerchio ogni perpendicolare elevata sul diametro, e prolungata fino all' incontro della circonferenza è media proporzionale trà segmenti del diametro*.

107. Sia $AO=x$, ed $OF=y$, l' equazione del cerchio sarà $y^2=2Rx-x^2$, ossia $x^2+y^2=2Rx$; sostituendo le rette si avrà $AF^2=BA.AO$, dal che ne conbiuderemo, *che ogni corda nel cerchio è media proporzionale tra il diametro, che si mena da un estremo, e 'l segmento adjacente fatto sullo stesso diametro dalla perpendicolare abbassatagli dall' altro estremo della corda medesima*.

108. Meniamo dal punto B''' la retta $B'''M$; Fig. 8 considerata come una retta, che passa per un punto, la sua equazione sarà $y-n=a(x-m)$(35) ; ma al punto B si ha $y=0$, ed $x=-R$; dunque l' equazione precedente diverrà $y=a(x+R)$; si meni dal punto B'', un' altra retta $B''M$; essendo al punto B'', $y=0$, ed $x=R$, la sua equazione sarà $y=a'(x-R)$ . . . (2). Se queste rette s' incontrano in un punto M della circonferenza, allora le coordinate x, y saranno comuni alle rette, ed alla circonferenza: quindi moltiplicando membro a membro le equazioni (1), e (2), la risultante $y^2=aa'(x^2-R^2)=-aa'(R^2-x^2)$ dee appartenere al cerchio, ed esser perciò identica all' altra $y^2=R^2-x^2$; si avrà dunque $1=-aa'$, ed $1+aa'=0$; ma quando tra le tangenti a,a' degli angoli, che fanno due rette coll' asse dalle ascisse ha luogo la condizione $aa'+1=0$, queste rette sono perpendicolari (37,38): dunque *le corde, che si me-*

nano ed un punto qualunque della semicirconferenza circolare degli estremi di un diametro fanno tra loro angolo retto.

109. Supponiamo che un punto qualunque B sia dato per mezzo delle sue coordinate, che chiameremo (m,n), e s' intenda da questo punto menata una segante BMM'; le coordinate AK,KM al punto M comune alla segante ed alla circonferenza del cerchio si chiamino x,y, e si chiami z la retta BM: Essendo

Fig. 9

$$BM^2=(BC-CO)^2+(KO-KM)^2,$$

sarà nè simboli $z^2=(m-x)^2+(n-y)$. Or la retta BM ha per equazione $y-n=a(x-m)$, da cui si tira

$$n-y=a(m-x),$$

sicchè sostituendo questo valore di $n-y$ nell' espressione

$$z^2=(m-x)^2+(n-y)^2,$$

si avrà

$$z^2=(a^2+1)(m-x)^2,$$

da cui si tira $m-x=\frac{z}{\sqrt{[1+a^2]}}$, e quindi si avrà $n-y=\frac{az}{\sqrt{[1+a^2]}}$

Facciamo $\frac{1}{\sqrt{[1+a^2]}}=K$, la prima di queste darà $x=m-Kz$, e l' altra $y=n-aKz$. Si sostituiscano questi valori di x, ed y nell' equazione al cerchio $y^2+x^2=R^2$; ordinando rispetto a z si avrà

$$z^2-2K(m+an)z+m^2+n^2-R^2=0 \ldots (H)$$

Quest' equazione essendo di 2° grado non da per z, che due valori. *Dunque una retta non taglia il cerchio, che in due punti.*

Dippiù si sa dall' algebra, che in ogni equazione l' ultimo termine, cioè quello sgombro da incognita è eguale al prodotto delle radici di essa: sicchè si avrà $m^2+n^2-R^2=BM \cdot BM'$. Meniamo delle altre seganti Bmm'; queste non differiranno dall' altra $BM'M''$ . . . , che nell'angolo sotto cui diversamente s' inclinano all' asse delle ascisse: sia a' la tangente dell' angolo, che fa questa nuova segante coll' asse delle ascisse: allora chiamando K' la quantità $\frac{1}{\sqrt{[1+a'^2]}}$, i valori di x, ed y saranno rispettivamente $m-K'z$, $n-a'K'z$, e l' equazione (H) diverrà

$$z^2-2K'(m+an)z+m^2+n^2-R^2=0,$$

per cui si avrà ancora

$$m^2+n^2-R^2=Bm'.Bm:$$

quindi sarà

$B'M$. $BM=Bm'$. Bm, espressione, che sciolta in proporzione, ci dimostra, allorchè il punto B è fuori del cerchio, *che se da un punto fuori del cerchio si menino due, o più seganti, le parti di queste intercette tra il punto dato, e la circonferenza del cerchio, saranno reciprocamente proporzionali.*

Segue da ciò 1. *Che se da un punto fuori del cerchio si menino due seganti, queste saranno reciprocamente proporzionali alle loro porzioni esterne.*

110. Intendasi un cerchio raportato alle due coordinate rettangolari AX, AY: supponiamo, cho l' asse AX sia tangente del cerchio, e dal punto A origine delle coordinate meniamo Fig. 1

una segante AMM' : indi si chiamino (x, y), (x', y') rispettivamente le coordinate à punti M, M'; si avrà tra le coordinate (x, y)

$$y^2-2by+b^2+x^2-2ax+a^2=R^2 \quad (94),$$

e tra le coordinate (x', y')

$$y'^2-2by'+b^2+x'^2-2ax'+a^2=R^2 \quad :$$

or per aver supposto AX tangente al cerchio, si ha $R=b$; dunque queste due equazioni diverranno rispettivamente $y^2-2by+x^2-2ax+a^2=0$ (1), e $y'^2-2by'+x'^2-2ax'+a^2=0$ (2) · Da una di queste se ne tiri il valore di b; indi dalla (1) sottrattane la (2), se nel risultato si metta per b; il valore ritrovato, si avrà $a^2=\sqrt{[(x+y^2)(x'^2+y'^2)]^2}$, ossia

$$AB^2=M'A.AM,$$

che ci da

$$M'A : AB=AB:AM; \text{ cioè}$$

allorchè una delle seganti diviene tangente, questa sarà media proporzionale tra l' intiera segante, e la sua porzione esterna; quindi le tangenti, che si menano ad un cerchio da un punto preso fuori di esso sono eguali fra loro.

111. Se il punto B cade dentro al cerchio, come in B', si avrà $AB'^2=m^2+n^2$, e quindi essendo $AB'<R$, la quantità $m^2+n^2-R^2$ sarà negativa, il che dimostra, che in questo caso le due radici $B'M''$, $B'M'''$ sono affette da segni contrarj, per cui il di loro prodotto

$$B'M''.B'M'''=m^2+n^2-R^2$$

è una quantità negativa : allora menando da B' un' altra corda $m''m'''$, perchè la quantità

$m^2+n^2-R^2$ è indipendente dall' angolo, che le seganti, e le corde fanno coll' asse dell' ascisse, si avrà ancora, come abbiamo quì sopra riflettuto, $B'm''.B'm'''=m^2+n^2-R^2$, e quindi $B'M''.B'M'''=B'm''.B'm''$, dal che ne segue, *che le parti di due corde, che si tagliano in un cerchio sono reciprocamente proporzionali*, come abbiamo anche dimostrato nella Geometria (238).

112. Questi teoremi, che nella Geometria sembrano disgiunti, quasicchè ciascheduno fosse una nuova verità, non ne formano che un solo, giacchè l' Algebra non gli ha tratti che da una stesso principio, cioè dall' espressione $m^2+n^2-R^2$ ultimo termine dell' equazione (H)

113. Sciogliamo l' equazione (H), si avrà, rimettendo in luogo di K il suo valore $\sqrt{\frac{1}{(1+a^2)}}$

$$z=\frac{(m+an)\pm\sqrt{[R^2(1+a^2)-(n-am)^2]}}{\sqrt{(1+a^2)}}$$

I due valori di z sono quelli delle rette BM, BM'. Quindi se ne prendiamo la differenza, l' espressione

$$2\sqrt{\frac{[R^2(1+a^2)-(n-am)^2]}{(1+a^2)}},$$

che se ne avrà, sarà quella della retta MM': allora se questa espressione si ponga eguale ad una data quantità P non maggiore del diametro del cerchio, e si determini a, avremo sciolto il seguente Problema: „ Determinare l' angolo, che „ dee formare coll' asse della ascissa una segante „ BM' menata nel cerchio da un punto B, af-

„ finchè la parte MM' di essa intercetta sia egua-
„ le ad una data grandezza P. Il calcolo riuscirà più semplice, se prenderemo per asse delle ascisse la retta che passa pe'l punto B: questa scelta dell' asse delle ascisse semplifica l' espressione di MM', giacchè avendosi in questo caso $n=0$; si ha $MM'=$

$$2\sqrt{\frac{[R^2(1+a^2)-a^2m^2]}{(1+a^2)}}:$$

facendola eguale a P, se ne tirerà

$$a=\sqrt{\frac{4R^2-P^2}{4m^2-4R^2+P^2}}=\sqrt{\frac{(4R^2-P^2)}{[4m^2-\sqrt{(4R^2-P^2)^2}}}$$

espressione facile a costruirsi, giacchè il numeratore rappresenta il catetto di un triangolo rettangolo, di cui l' ipotenusa è $2R$ e P l' altro catetto, e 'l denominatore esprime il catetto di un altro triangolo rettangolo, di cui l' ipotenusa è $2m$, e l' altro catetto è la retta simboleggiata dal numeratore (a).

114. L'equazione al cerchio, e le proprietà, che abbiamo dimostrate riguardo ad esso non si sono rapportate, che agli assi rettangolari. Egli è ragionevole ora il vedere se possano esservi nel cerchio sistemi di diametri obbliqui e conjugati. Per osservarlo si trasformi l' equazione $R^2=y^2+x^2$ tra le coordinate rettangolari x, y nell' altra tra le coordinate obblique x', y' per mezzo delle note formole

(a) Vedi Lacroix Traité élèmentaire trigonomètrie rectiligne, e sphèriche, et d' application de l' Algebre à la Géometrie troisième édition pag. 141.

$$x=\cos(x',x)x'+\cos(y',x)y',$$
$$y=\mathrm{sen}(x',x)x'+\mathrm{sen}(y',x)y':$$

ordinata la trasformata, l'ipotesi de' diametri conjugati (57) darà luogo all'equazione di condizione

$$\cos(x,x')\cos(x,y')+\mathrm{sen}(x,x')\mathrm{sen}(x,y')=0,$$

ossia

$$\mathrm{tang}(x,x')\mathrm{tang}(x,y')+1=0,$$

che non può aver altrimenti luogo, se non quando le nuove coordinate x',y' sono anche rettangolari (37). Dunque *i soli assi rettangolari possono nel cerchio esser diametri conjugati*. Passiamo all'Ellisse.

CAPO VI.

Ellisse.

115. Quando gli assi $2a,2b$ sono diseguali; il cerchio prende la forma di una curva anche chiusa, che abbiamo veduto chiamarsi Ellisse (60). La sua equazione rapportando l'origine delle coordinate rettangolari al centro è $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ (61). Fissiamo l'origine al vertice, chiamando BP x', sarà $OP=OB-BP$, ossia $x=a-x'$, valore che sostituito nell'equazione precedente la cambia in quest' altra $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax'-x'^2)$. La prima ci dà

Fig.

$$y:(a+x)(a-x)=b^2:a^2,$$

e l'altra

$$y^2:x'(2a-x')=b^2:a^2$$

e l' una e l' altra ci dimostra *che il quadrato di una semiordinata all' asse maggiore sta al rettangolo delle ascisse da entramb' i vertici, come il quadrato dell' asse minore è al quadrato del maggiore*. Questa è la proprietà, in cui si è trasformata nell' ipotesi presente quella del cerchio, che il quadrato di una semiordinata è eguale al rettangolo de' segmenti, che essa taglia sul diametro: nel cerchio il rapporto è d' eguaglianza per esser $b=a$; ma nell' ellisse il quadrato di una semiordinata, benchè disuguale dal rettangolo de' segmenti, che forma sull' asse maggiore, pure gli serba una ragion costante.

116. Segue da ciò, che, poichè tra due altre coordinate rettangolari x'', y'' si ha parimente

$$y''^2:(a+x'')(a-x'')=b^2:a^2,\ y''^2:x''(2a-x'')=b^2:a^2$$

si avrà

$$y^2:y''^2::(a+x)(a-x):(a+x'')(a-x''),\ \text{ed}$$
$$y^2:y''^2=x(2a-x):x''(2a-x''),$$

cioè *nell' ellisse i quadrati delle semiordinate sono tra loro come i rettangoli delle ascisse da entramb' i vertici*.

117. Poichè l' ellisse è una curva simmetrica tanto riguardo ad un asse, che riguardo all' altro (60), ne segue che le stesse proprietà gli competono, allorchè le ascisse si contano sull' asse minore. In fatti sciolta l' equazione

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

rispetto ad x^2, da

$$x^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2),$$

che ci da

$$x^2:(b+y)(b-y)=a^2:b^2,$$

ossia, chiamando $OH,y,HI^2:AH.HA'=a^2:b^2$. Se l'origine si trasporta parimente al vertice A, chiamando $AH\ y'$, si avrà $y=b-y'$, e l' equazione precedente si cambierà con tale sostituzione in $x^2=\frac{a^2}{b^2}(2by'-y'^2)$, la quale da parimente

$$x^2:y'(2b-y')=a^2:b^2,$$

ossia

$$HO^2:AH.HA'=a^2:b^2.$$

Quindi dimostrando lo stesso per due altre coordinate y'',x'', si avrà $x^2:x''^2::(b+y)(b-y):(b+y'')(b-y'')$, o pure $x^2:x''^2::y(2a-y):y''(2a-y'')$; cioè *i quadrati delle semiordinate all' asse minore sono tra loro come i rettangoli delle ascisse da entramb' i vertici*.

118. Chiamiamo z l' ordinata di un cerchio descritto col raggio a, si avrà $z^2=a^2-x^2$, se z' è l' ordinata di un cerchio descritto col raggio b, si avrà $z'^2=b^2-y^2$; e poicchè si ha per ellisse

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),\ \text{o}\ x^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)$$

secondochè le ascisse si contano sull' asse maggiore, o minore, sostituendo z^2 nella prima equazione, e z'^2 nella seconda, si avrà $y^2=\frac{b^2}{a^2}z^2$

ed $x^2=\frac{a^2}{b^2}z'^2$: la prima ci darà $y=\frac{b}{a}z$, ed y : $z=b:a$, e la seconda $x=\frac{a}{b}z'$, da cui si tira $x:z'=a:b$, dal che ne conchiuderemo, *che se sull' asse maggiore, o minore di una Ellisse si descrive un cerchio, e si meni da uno stesso punto dell' asse delle ascisse un' ordinata a queste due curve, nel primo caso l' ordinata dell' ellisse è all' ordinata al cerchio, come l' asse minore è al maggiore, e nel secondo l' ordinata all' ellisse è all' ordinata al cerchio, come l' asse maggiore al minore.*

119. Quindi le ordinate di un' Ellisse sono le stesse ordinate del cerchio descritto sull' asse maggiore, o minore, ma nel primo caso diminuito nel rapporto costante dell' asse maggiore al minore, e nel secondo accresciute nel rapporto costante dell' asse minore al maggiore.

Fig. 11 120. Questa simiglianza, che vi è tra l'Ellisse, e 'l cerchio, ci da un metodo facilissimo di descrivere un Ellisse per assegnazione di punti per mezzo del cerchio. Infatti se descritto sull' asse minore, e sul maggiore due cerchi, si menino i raggi OM, OK, OQ', e dà punti M, K, Q' si abbassino sull' asse maggiore le perpendicolari MP, KD, $Q'i$, menate da' punti m, n, o, ove i raggi OM, OK, OQ' incontrano la circonferenza del cerchio descritto sull' asse minore lo mn, ut, ol parallele ad AB, i punti n, t, l, in cui queste parallele incontrano rispettivamente le perpendicolari MP, KD, $Q'i$, apparterranno all' ellisse, il che è chiaro per esser

$\frac{OM}{Om}=\frac{PM}{Pn}$, $\frac{OK}{Ou}=\frac{DK}{Dt}$, ossia $\frac{a}{b}=\frac{PM}{Pn}=\frac{DK}{Dt}$ ec.

121. Seguitiamo ad occuparci de' cambiamenti, che la diseguaglianza degli assi $2a$, $2b$ porta nell' ellisse. A tal effetto prendiamo una media proporzionale fra $(a+b)$, ed $(a-b)$, chiamandola e, sarà $e^2=a^2-b^2$, ed $e=\pm\sqrt{(a^2-b^2)}$; nell' equazione $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ mettiamo in vece di x^2 la quantità a^2-b^2, si avrà $y^2=\frac{b^4}{a^2}$ e $2y=\frac{2b^2}{a}=\frac{4b^2}{2a}$, d' onde si tira $2a : 2b :: 2b : 2y$.

122. L' ascissa al centro che si prende eguale a $\sqrt{(a^2-b^2)}$ chiamasi *eccentricità*; i punti F', F (Fig.) distanti dal centro per $\sqrt{(a^2-b^2)}$ fuochi dell' ellisse, e l' ordinata costante corrispondente all' ascissa $\sqrt{(a^2-b^2)}$ chiamasi *parametro*.

123. Dunque *il parametro appartenente all' asse maggiore è una terza proporzionale in ordine all' asse maggiore stesso ed all' asse minore.*

124. Poichè la quantità $\sqrt{(b^2-a^2)}$ è imaginaria, ne segue che sull' asse minore non vi corrispondono fuochi; ma essendo una quantità reale la terza proporzionale in ordine all' asse minore, ed all' asse maggiore, questa quantità chiamasi parametro appartenente all' asse minore.

125. Dunque in generale *il parametro di un diametro è una terza proporzionale in ordine a se stesso ed al suo conjugato.*

126. L' equazione $p=\frac{2b^2}{a}$ ci da $\frac{p}{2a}=\frac{b^2}{a^2}$; sostituendo questo valore nell' equazione dell' ellisse avremo $y^2=\frac{p}{2a}(a^2-x^2)$, ed $y^2=\frac{p}{2a}(2ax'-x'^2)$,

dalle quali ne tireremo $y^2.(a+x)(a-x)=p:2a$, ed $y^2 : x'(2a-x')=p : 2a$: cioè *nell' ellisse il quadrato di una semiordinata al diametro 2a è al rettangolo delle ascisse da entrambi i vertici come il paramerro è allo stesso diametro*.

127. L' equazione

$$y^2=\frac{p}{2a}(a^2-x^2) \text{ o } y^2=\frac{p}{2a}(2ax'-x'^2),$$

si chiama l' *equazione dell' ellisse rapportata al parametro*.

128. Gli antichi chiamavano il parametro *lato retto* e l' diametro *lato trasverso*.

129. Essendo nel cerchio $a=b$, si avrà $e=o$; quindi i fuochi di un' ellisse, che si trasforma in cerchio, si riuniranno nel centro; ed allora l' ordinata pe'l fuoco diviene diametro, cioè il parametro di un cerchio è il suo diametro.

130. Quindi tra' fuochi dell' ellisse, e 'l centro del cerchio vi è una grande analogia. Verifichiamola col calcolo.

Meniamo due raggi vettori FQ, fQ: poichè le coordinate al punto F sono
Fig. $m'=\sqrt{(a^2-b^2)}$, ed $n'=o$, ed al punto Q, $n=y$; ed $m=-x$ (perchè presa in senso opposto ad OF), colla sostituzione di questi volori nell' espressione $\sqrt{[(m'-m)^2+(n'-n)^2]}$ (55), si avrà

$$QF=\sqrt{[(a^2-b^2+2x\sqrt{(a^2-b^2)}+x^2+y^2]} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Affinchè il punto Q sia sull' ellisse, dovrà essere

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)=b^2-\frac{b^2x^2}{a^2},$$

e con tale sostituzione l' equazione (1), fatte le debite riduzioni, diverrà

$$QF=\sqrt{\left[a^2-b^2+2x\sqrt{[a^2-b^2)}+\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2\right]}=$$

$$a+x\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}.$$

Similmente per essere a presa dalla stessa parte di e riguardo a Qf, si avrà al punto f

$$m'=e\ ,\ n'=0\ ,$$

ed al punto Q

$$n=y\ ,\ m=x\ ;$$

e sarà perciò (55)

$$FQ=\surd(a^2-b^2-2x\surd[a^2-b^2]+x^2+y^2)\ \ .\ .\ .\ (2)$$

la quale, colle debite riduzioni, diverrà

$$FQ=a-x\frac{\surd(a^2-b^2)}{a}\ ;$$

allora sommando l'espressioni di QF, e Qf, ne verrà $QF+Qf=2a$. Dunque *se da' fuochi dell' ellisse si menino ad un punto qualunque del perimetro ellittico due raggi vettori, la di loro somma sarà costante, cioè eguale all' asse maggiore*.

132. Quindi i fuochi dell'ellisse godono insieme della proprietà, che ha il centro nel cerchio, con che resta confermata col calcolo l'analogia ch' esiste fra' fuochi dell' ellisse, e'l centro del cerchio.

133. Meniamo da' fuochi ad un estremo A' dell' asse minore le rette FA', fA'; le coordinate al punto F sono Fig. 12

$$x=\surd(a^2-b^2)\ ,\ y=0\ ,$$

e quelle del punto A' sono

$$x=0\ ,\ y=b:$$

si sostituiscono questi valori nell' espressione

$$\surd([m'-m]^2+[n'-n]^2)\ ,$$

ch' è quella di una retta condizionata a passare per due punti $(m,n)(m',n')$ (55); si avrà $FA'=a$: similmente si dimostrerà $fA'=a$, dal che nesegue *che la retta, la quale unisce uno de' fuochi con un estremo dell' asse minore, è eguale al semiasse maggiore*.

134. Sicchè resteranno determinati i fuochi di una ellisse con descrivere un cerchio, prendendo uno degli estremi dell'asse minore per centro, e 'l semiasse maggiore a per raggio.

135. Nel cerchio dalla sua proprietà di aver eguali tutt' i raggi ne abbiamo ricavata la sua Equazione. Facciamo lo stesso per l' ellisse, e proponiamoci il seguente Problema ,, *Data quella curva, che ha la proprietà di aver costante la somma di due raggi menati da uno stesso punto del suo perimetro a due punti fissi presi dentro di essa, ritrovare la sua equazione*.

Fig. 11 Siano F, f i due punti fissi, chiamisi $2a$ la grandezza costante, le ascisse OF, Of costanti siano $\sqrt{(a^2-b^2)}$, e s' indichino con e: due raggi qualunque FQ, Qf si chiamino rispettivamente z, z'; si avrà sulle prime

$$z+z'=2a \quad . \; . \; . \; (1).$$

Dippiù, sostituendo nell' espressioni (1), e (2) (131) e in luogo di $\sqrt{(a^2-b^2)}$, e z, z' rispettivamente in luogo di FQ, fQ, elevando a quadrato, si avrà

$$z^2=y^2+e^2+2ex+x^2 \quad . \; . \; . \; (2)$$

e $$z'^2=y^2+e^2-2ex+x^2 \quad . \; . \; . \; (3):$$

si prenda la somma, e la differenza di (2),e(3); si avrà

$$z^2+z'^2=2(y^2+e^2+x^2)\ \ldots\ (4),$$

o

$$z^2-z'^2=4ex\ldots(5):$$

l' equazione (5) si metta la forma $(z+z')(z-z')=4ex$, ed in luogo di $z+z'$ si sostituisca il valore $2a$, che si ha da (1), si avrà

$$z-z'=\frac{2ex}{a}\ \ldots\ (6)$$

allora l' equazioni (I), e (6) ci daranno

$$z=a+\frac{ex}{a}\ \ldots\ (7),$$

$$\text{e } z'=a-\frac{ex}{a}\ \ldots\ (8)$$

e quindi si avrà

$$z^2=a^2+2ex+\frac{e^2x^2}{a^2},\ \text{e } z'^2=a^2-2ex+\frac{e^2x^2}{a^2},$$

e perciò

$$z^2+z'^2=2a^2+2\frac{e^2x^2}{a^2};$$

questa equazione paragonata colla (4) ci da

$$a^2+\frac{e^2x^2}{a^2}=y^2+e^2+x^2,$$

d' onde si tira

$$a^2y^2+(a^2-e^2)x^2=a^2(a^2-e^2);$$

ma l'espressione $e^2=a^2-b^2$ ci da $b^2=a^2-e^2$; dunque sostituendo nell' ultima equazione questo valore di a^2-e^2, essa si cambierà in quest' altra

$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, da cui si ha $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, ch'è la stessa equazione dell' ellisse.

Dunque l' ellisse è il luogo geometro degl' infiniti punti, la cui distanza da due punti fissi è costante.

136. Segue da ciò, che noi possiamo dare all' ellisse una definizione simmetrica a quella del cerchio, cioè d' essere *una curva che racchiude spazio, e che ha ad egual distanza dal centro due punti dentro di essa, tali, che i raggi vettori menati da questi punti ad uno stesso punto del suo perimetro preso a piacere sono insieme eguali all' asse maggiore di essa curva.*

137. Dunque l'equazioni (7), ed (8) benchè abbiano la forma di equazioni alla linea retta; pure appertengono all' ellisse, di cui esprimono la proprietà caratteristica di aver la somma di due raggi vettori eguale all' asse maggiore: infatti in esse le coordinate variabili non sono rapportati a due assi fissi, come nell' equazione alla linea retta, ma una di esse è il raggio vettore, che varia ad ogni punto del perimetro ellittico, e l' altra è l' ascissa al centro. Portiamo anche l' origine delle ascisse al punto F, chiamando FP, x'; si avrà $x=x'-e$, valore che sostituito in una dell'equazioni (7), o (8), p, e, nella (7) la cambia in

Fig 11

$$z=a+\frac{e(x'-e)}{a}=\frac{a^2-e^2+ex'}{a}=\frac{b^2+ex'}{a} \quad . \; . \; . \; (9),$$

Or poicchè le coordinate z, x partano da uno stesso punto, esse sono coordinate polari; quin-

di si ha $x'=z\cos.(x',z)$ (50,VI), valore che sostituito in (9) ci da

$$z=\frac{b^2+ez\cos.(x',z)}{a},$$

da cui si tira $z=\dfrac{b^2}{a-e\cos.(x',z)}$.

Questa equazione dicesi *equazione polare* dell' Ellisse, il cui uso è grande nell' astronomia. Il fuoco F è in questo caso il polo della curva.

138. Dalla definizione, che noi abbiamo qui sopra recata all' ellisse ne segue, che possiamo facilmente descrivere un' ellisse per assegnazione di punti nel seguente modo, cioè si prenda una retta BB' a piacere, e divisa per metà in O, col centro O, e con un raggio minore di OB si descriva un cerchio il quale segnerà in BB' due punti F, f equidistanti da O; indi col centro f, e con un raggio R minore di BB' si descriva un altro cerchio; di poi preso F per centro, ed un raggio $R'=BB'-R$, si descriva un terzo cerchio; i punti, ne' quali questo segherà il cerchio precedente apparterranno all' ellisse: infatti essendo per costruzione $R'=BB'-R$, sarà $R'+R=BB'$ proprietà caratteristica dell'ellisse. Fig. 12

139. Se vogliamo descrivere un'ellisse con moto organico, metodo che si usa, quando si dee descrivere sul terreno una curva ellittica; allora presa una corda $FA'f$ della lunghezza di BB', e fissata co' suoi estremi ne' punti F, f, si tenda con uno stiletto A', che si farà girare lungi la corda medesima: Egli è chiaro ch' essendo sempre $FA'+A'f=BB'$, $FQ+Qf=BB'$, la punta dello stiletto descriverà un' ellisse.

140. Se fossero dati i due assi, allora si determinino prima i fuochi, come abbiamo detto al di sopra, a poi si faccia uso delle costruzioni quì recate, secondocchè l' ellisse si vuol descrivere per assegnazione di punti, o con mot' organico. Se sarà dato il perimetro, ed uno degli assi, allora l'altro asse sarà noto per mezzo dell' equazione $p=\frac{2b^2}{a}$, e quindi si renderanno noti i fuochi della curva, cosicchè si potrà descriverla.

Fig. 13 141. Eleviamo dal punto A la perpendicolare AK eguale al parametro della curva, e si uniscano gli estremi K, D del parametro, e dell' asse; si rapporti la retta KD alle due coordinate AD, AK, e sia A l'origine del sistema; chiamando generalmente m', n' le coordinate al punto K, ed m,n le altre al punto D, sia AK l' asse delle n,n', AD quello delle m,m': essendo il punto K preso sull'asse delle n', esso sarà dato per le condizioni $m'=0,n'=p$; per la stessa ragione il punto B resterà determinato dalle condizioni $n=0,m=2a$. Ciò posto l' equazione della retta DK condizionata a passare pe' punti K, e D sarà generalmente

$$y-n=\frac{n-n'}{m-m'}(x-m),$$

la quale, colla sostituzione de' valori di m,n; m',n', diviene

$$y=\frac{p}{2a}(2a-x).$$

Sia FI un' ordinata qualunque a questa retta; sarà

$$FI=\frac{p}{2a}(2a-x)\ ;$$

si prolunghi FI, finchè incontra la curva in un punto C; poicchè si ha

$$AF.FI=\frac{p}{2a}(2ax-x^2);$$

ed

$$FC^2=\frac{p}{2a}(2ax-x^2)\ (115),$$

sarà

$$FC^2=FA.FI$$

dal che ne segue, *che nell' ellisse il quadrato di qualunque semiordinata all' asse maggiore è eguale al rettangolo dell' ascissa nella perpendicolare elevata dall' estremo di essa, e prolungata fino alla retta, che unisce gli estremi del parametro, e dell' asse maggiore.*

142. Lo stesso si dimostrarebbe rispetto all'asse minore. Quindi essendo $FI<AK$, ne segue che nell' ellisse il quadrato di una semiordinata è minore del *rettangolo dell' escissa nel parametro*, ed è a tal proprietà, che questa curva dee il suo nome di ellisse, cioè curva deficiente da ελλιπειν *deficere.*

La retta KD chiamasi *regolatrice.*

Nel cerchio ha luogo la stessa proprietà, com' è facile il vederlo collo stesso raziocinio del n.° (prec.).

143. Meniamo dall' estremo A' dell' asse maggiore dell'ellisse una corda $A'K$. Poicchè al punto A' si ha $y=0$, ed $x=-a$, la sua equazione sarà Fig. 15

$$y=a'(x+a)\ .\ .\ .\ (1)\ ;$$

l' equazione di un altra corda, che si mena dal punto A, ove si ha $y=0$, ed $x=a$ sarà

$$y=a''(x-a) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

L' equazioni (1), e (2) ci danno rispettivamente

$$a'=\frac{y}{x+a}, \quad a''=\frac{y}{x-a};$$

quindi si avrà

$$a'a''=\frac{y^2}{x^2-a^2};$$

espressione, che apparterrà al punto d' incontro delle rette, giacchè in essa si combinano le x, y della loro equazioni (1), e (2). Affinchè questo punto d' incontro sia sulla curva fa e l'uopo, che si abbia

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)=-\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2);$$

da cui si tira

$$\frac{y^2}{x^2-a^2}=-\frac{b^2}{a^2};$$

dunque sarà parimente

$$a'a''=-\frac{b^2}{a^2},$$

e questa equazione esprimerà la condizione, perchè le due corde AK, $A'K$ si riuniscono sull' ellisse allora l' equazione (1), (2) diverranno rispettivamente

$$y=-\frac{b^2}{a''a^2}(x+a)$$

$$y=-\frac{b^2}{a'a^2}(x-a).$$

144. Supponiamo inversamente, che tra le tangenti a', a'' degli angoli, che due rette fanno coll' asse delle ascisse vi sia il rapporto $a'a''=-\frac{b^2}{a^2}$, ed andiamo a determinare il luogo, ove queste due rette vanno a concorrere; allora l'equazioni di queste due rette saranno rispettivamente $y=-\frac{b^2}{a''a^2}(x+a)$, $y=-\frac{b^2}{a'a^2}(x-a)$: moltiplichiamo membro a membro queste due equazioni, sostituendo per $a'a''$ la quantità $-\frac{b^2}{a^2}$, si avrà $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, dal che se ne conchiude che le due rette date rispettivamente per mezzo dell' equazioni $y=-\frac{b^2}{a''a^2}(x+a)$, $y=-\frac{b^2}{a'a^2}(x-a)$ vanno a riunirsi sopra un' ellisse, in cui il rapporto degli assi è $\frac{b}{a}$, volgendo l'angolo fatto nel di loro incontro all' asse $2a$.

Nello stesso modo potrà dimostrarsi, che la condizione, affinchè due corde menate dagli estremi dell' asse minore vadano ad incontrarsi sull' ellisse, dee essere $a'a''=-\frac{a^2}{b^2}$, indicando con

a', a'' le tangenti degli angoli, ch' esse fanno rispettivamente coll' asse delle ascisse; e che all' opposto, se tra le tangenti degli angoli, che due rette fanno coll' asse delle ascisse vi è la condizione $a'a''=-\frac{a^2}{b^2}$, queste rette andranno ad incontrarsi sopra un' ellisse, in cui il rapporto degli assi è $\frac{b}{a}$, volgendo l' angolo fatto dall' incontro di esse all' asse $2b$.

145. *Dunque è costante il prodotto delle tangenti trigonometriche degli angoli, che fanno co' rispettivi assi due corde menate da' loro estremi ad un punto qualunque del perimetro ellittico:*

146. Segue da ciò, che nell' ellisse l' angolo iscritto nel semiperimetro, che poggia sull' asse maggiore, o sul minore non è retto (57). Andiamo a determinarne la natura coll' analisi. L' equazioni delle rette $A'K$, AK sono rispettivamente

Fig.15

$y=a'(x+a)$, $y=a''(x-a)$ [(143), (1), (2)].

La prima ci dà

$$a'=\frac{y}{(x+a)}=\text{tang. } KA'T,$$

e la seconda

$$a''=\frac{y}{(x-a)}=\text{tang. } KAT.$$

Or poichè l' angolo KAT è supplemento dell' altra KAA', di cui n' è anche supplemento la somma degli angoli AKA', $KA'T$(geom.36), sarà

$$AKA'+KA'T=KAT,$$

e quindi

$$AKA'=KAT-KA'T,$$

e

$$\text{tang. } AKA'=\frac{a''-a'}{1+a'a''}=$$

$$\frac{\frac{y}{x-a}-\frac{y}{x+a}}{1+\frac{y^2}{x^2-a^2}}=\frac{\frac{y}{x-a}-\frac{y}{x+a}}{\frac{x^2-a^2+y^2}{x^2-a^2}}=\frac{2ay}{y^2+x^2-a^2}.$$

Poicchè l' incontro di queste rette dee accadere sull' ellisse, vi è luogo alla condizione

$$y^2=a^2\frac{b^2}{}(a^2-x^2).$$

Riducendo la quantità $\frac{2ay}{y^2+x^2-a^2}$ mercè di questa equazione, essa diverrà

$$\frac{2a\frac{b}{a}\sqrt{[a^2-x^2]}}{\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)-1(a^2-x^2)}=\frac{2b}{\frac{(b^2-a^2)\sqrt{[a^2-x^2]}}{a^2}}=$$

$$\frac{2b}{\frac{(b^2-a^2)\sqrt{\left[1-\frac{x^2}{a^2}\right]}}{a}}=-\frac{2ab}{(a^2-b^2)\sqrt{\left[1-\frac{x^2}{a^2}\right]}};$$

cioè si avrà

$$\text{tang. } AKA'=-\frac{2ab}{(a^2-b^2)\sqrt{\left[1-\frac{x^2}{a^2}\right]}} \quad \text{(I).}$$

Essendo questa una quantità negativa, sarà negativa la tangente dell'angolo AKA', e quindi quest' angolo sarà ottuso (trig. 14).

Se facciamo $x=a$, l' espressione (I) diverrà infinita: questo c' indica che al punto A' ove si ha $x=a$, $y=0$, l' angolo delle due corde diviene retto (trig. 17): infatti in tal ipotesi la AK si distende sulla AA', e la $A'K$ diviene tangente al punto A'; E se facciamo $y=b$, e quindi $x=0$, la quantità (I) diverrà $-\frac{2ab}{a^2-b^2}$. Allorchè si ha $x=0$, il denominatore ha il massimo valore, di cui è capace, e l'espressione (I) diverrà la minima possibile cui corrisponde in conseguenza il massimo degli angoli ottusi fatti da due corde qualunque AK, $A'K$, (a) cioè allorché il punto K si porterà sul punto M', ové si ha $y=b$, ossia sull' estremo dell' asse minore, l' angolo $AM'A'$ è il massimo di tutti gli angoli iscritti nel semiperimetro $AM'A'$.

147. L' espressione

$$\frac{2ab}{(a^2-b^2)\sqrt{\left[1-\frac{y^2}{b^2}\right]}} \quad \ldots \text{(I')}$$

Fig. 16 ch' è quella della tangente dell' angolo $A'R'A$, come può facilmente osservarsi, essendo positiva, ci mostra, ché gli angoli iscritti nel semiperimetro ellittico, che poggia sull' asse minore, sono acuti (trig. 17). Se in essa facciamo $y=b$, e quin-

(a) Il massimo angolo ottuso ha il minimo angolo acuto per supplemento; quindi la sua tangente è la minima possibile (trig. 14)

di $x=0$, o $x=a$, e quindi $y=0$; nel primo caso l' espressione (I') divenendo infinita, c' indica che al punto A, o A' l'angolo $A'R'A$ diviene retto come $A'AS$; e nel secondo, trasformandosi l' espressione (I') in $\frac{2ab}{a^2-b^2}$ quantità positiva, e corrispondente al massimo valore del denominatore, e quindi al minimo valore del rotto, ci dimostra che l'angolo $AB''A'$ è il minimo di tutti gli angoli iscritti nel semiperimetro ellittico, che poggia sull' asse minore.

148. Segue da tutto ciò, che i quattro vertici dell' ellisse sono il limite di tutti gli angoli formati da due corde che si menano ad uno stesso punto del perimetro ellittico dagli estremi del l' asse maggiore, o minore, e che gli angoli crescono a proporzione che si avvicinano ad A', o A, e diminuiscono a proporzione che si avvicinono a' punti B', B''. Dunque 1.° l' angolo $B'A'B''$, $B'AB''$ fatto ad uno degli estremi dell' asse minore da due corde menate dagli estremi dell'asse maggiore è il massimo degli ottusi che si possono iscrivere nel semiperimetro ellittico, che poggia sull' asse maggiore, e l'angolo $A'B''A$ fatto dalle due corde $A'B''$, AB'' menate dagli estremi dell' asse minore ad uno degli estremi dell' asse maggiore è il minimo di tutti gli acuti iscritti nel semiperimetro, che poggia sull'asse minore; 2.° gli angoli acuti, che provengono dal semiperimetro ellittico, che poggia sull' asse minore, e gli ottusi, che provengono dal semiperimetro ellittico, che poggia sull' asse maggiore, divengono retti i primi agli estremi A, A' dello stesso asse minore, e gli altri agli estremi B', B'' dello stesso asse maggiore.

149. Le considerazioni geometriche ci portano alle stesse conseguenze, giacchè si sa della Geometria che poichè il cerchio descritto sull' asse maggiore inviluppa l'ellisse per essere $\frac{z}{y}=\frac{a}{b}$, ed all' opposto per l' asse minore, ne segue che gli angoli fatti nel semiperimetro ellittico $B'AB''$ saranno maggiori degli angoli iscritti nel semicerchio, e perciò saranno ottusi (geom. 50), siccome per la stessa ragione saranno acuti gli angoli iscritti nel semiperimetro, che poggia sull' asse minore,

150. Poichè sono identiche, e con segno contrario l' espressioni delle tangenti degli angoli $B'A'B''$, il $AB''A'$, questi angoli saranno supplementi l' uno dell' altro; *cioè sono supplementi gli angoli fatti agli estremi dell' asse maggiore e minore di una ellisse da due corde menate rispettivamente dagli estremi dell' asse minore, e maggiore* (trig. 14).

CAP. VII.

Ellisse rapportata a' diametri conjugati obbliqui.

151. Passiamo ad esaminare l'ellisse rispetto a'diametri conjugati obbliqui; e sulle prime trasformiamo l' equazione $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ tra le coordinate rettangolari x, y in un' altra tra le coordinate obblique comunque x', y', facendo uso delle note formole (50. III)

$$x=\cos.(x',x)x'+\cos.(y',x)y',$$

ed

$$y=\text{sen}.(x',x)x'+\text{sen}.(y',x)y',$$

la trasformata sarà

$$a^2[\text{sen.}^2(x',x)x'^2+2\text{sen}(x',x)\text{sen.}(y',x)x'y'+$$
$$\text{sen.}^2(y',x)y'^2]+b^2[\cos.^2(x',x)x'^2+2\cos.(x',x)$$
$$\cos.(y',x)x'y'+\cos.^2(y',x)y'^2]=a^2b^2 ,$$

la quale ordinata da

$$[a^2\text{sen.}^2(y',x)+b^2\cos.^2(y',x)]y'^2+$$
$$2[a^2\text{sen}(x',x)\text{sen.}(y',x)+b^2\cos.(x',x)\cos.(y',x)]x'y'$$
$$+[a^2\text{sen.}^2(x',x)+b^2\cos.^2(x',x)]x'^2=a^2b^2 \ldots (1).$$

Questa equazione, per ridursi a contenere i quadrati delle sole variabili x', y', ossia, ch' è lo stesso, per ridurre i diametri qualunque x', y' a conjugati (67), bisogna che tra gli angoli (x',x), (y',x) abbia luogo la condizione

$$2[a^2\text{sen}(x',x)\text{sen.}(y',x)+b^2\cos.(x',x)\cos.(y',x)]=0 ,$$

ed allora l'equazione (1) prenderà la forma

$$[a^2\text{sen.}^2(y',x)+b^2\cos.^2(y',x)]y'^2+[a^2\text{sen.}^2(x',x)+$$
$$b^2\cos.^2(x',x)]x'^2=a^2b^2 \ldots (2)$$

nella quale è chiaro, che non ci sono, se non i quadrati delle sole variabili.

152. Avendo noi eseguita la trasformazione sull'equazione dell' ellisse rapportata al centro, come origine, ed essendo il centro l' origine commune di tutt' i diametri, e rettangolari, ed obbliqui, non abbiamo perciò introdotte la formole per una nuova origine, come sarebbe duopo, se la trasformazione si eseguisse sull' equazione dell' ellisse rapportata all' origine sul vertice.

153. Vediamo ora a quali conseguenze ci porta l' equazione di condizione

$a^2\text{sen.}(x',x')\text{sen.}(y',x)+b^2\cos.(x',x)\cos.(y',x)=0$:

essa ci presenta quattro quantità a determinare

$\text{sen.}(x',x),\cos.(x',x),\text{sen.}(y',x),\cos.(y',x)$;

or poichè noi non abbiamo tra queste quantità, che tre sole equazioni di condizione, cioè

$$\text{sen.}^2(x',x)+\cos.^2(x',x)=1 \ldots (1)$$

$$\text{sen.}^2(y',x)+\cos.^2(y',x)=1 \ . \ . \ . \ (2) \text{ , e}$$

$$a^2\text{sen}(x,x')\text{sen.}(x,y')+b^2\cos.(x,x')\cos.(x,y')=0.(3),$$

possiamo, come dall' ànalisi indeterminata, disporre a piacere di una di esse quantità per determinare le altre : di vantaggio posta l' equazione di condizione sotto la forma

$$a^2\text{tang.}(x',x)\text{tang.}(y',x)+b^2=0 \ . \ . \ . \ (4)$$

ci mostra, che qualunque valore diamo alla quantità ang (x',x), o all' altra ang.(y',x), nel primo caso sarà sempre una quantità reale tang. (y',x) e nel secondo tang. (x',x) : ne segue perciò che l' angolo (x',y') de' nuovi diametri conjugati può avere infinite diverse inclinazioni, e che perciò nell' ellisse i *sistemi de' diametri conjugati sono infiniti.*

Una delle infinite supposizioni che possiamo fare è quella di prendere sen.$(x',x)=0$, ossia ang.$(x,x')=0$; l'equazione (4), dietro tale supposizione, darà

$$\text{tang.}(y',x)=-\frac{b^2}{0}=\infty .$$

Dunque l'angolo (y',x) sarà retto (trig. 17), e sarà $\cos.(y',x)=0$ (trig. 17), con che ha luogo l'equazione (3); quindi chiamando MK l'asse delle x', e PQ quello delle y', l'angolo MCB' diverrà zero, e l'altro PCB' retto, dunque allora i due diametri x', y' si confonderanno cogli assi ortogonali, x, y, dal che ne conchiuderemo, che poichè la sola supposizione di $\text{sen.}(x';x)=0$, e quindi di $\cos.(y',x)=0$ fa coincidere i nuovi diametri conjugati co' primitivi rettangolari, *non v' è che un sol sistema di diametri conjugati rettangolari.* Fig. 16

154. Poichè conosciuto uno degli angoli (x,x'), (x,y'), l'altro angolo si renderà noto per mezzo dell'equazione di condizione, ne segue che *dato un diametro qualunque di posizione, possiamo facilmente ritrovare il sito del suo conjugato.* Infatti se si conosca l'angolo (x,x'), che fa un diametro coll'asse delle ascisse, allora poichè l'equazione di condizione ci da $\text{tang.}(x,y')=-\frac{b^2}{a^2}\text{cotang.}(x,x')$, basterà per avere il diametro conjugato ad x', inclinare all'asse delle x un angolo, la cui tangente è la quantità $-\frac{b^2}{a^2}\text{cotang.}(x,x')$.

155. L'equazione di condizione messa sotto di questa forma

$$\text{tang.}(x,x')\text{tang.}(x,y')=-\frac{b^2}{a^2}\text{, da}$$

$$\text{tang.}(x,x')=-\frac{b^2}{a^2\text{tang.}(x,y')};$$

cioè il valore di tang.(x,x') sarà positivo, se tang.(x,y') è negativa, ed all'opposto, dal che se ne conchiude, che se uno degli angoli (x,x') sarà acuto, l' altro sarà ottuso, ed all' opposto.

156. Abbiamo di sopra veduto che tra le tangenti degli angoli a',a'', che fanno coll' asse delle ascisse due corde menate dagli estremi dell' asse maggiore ad uno stesso punto del perimetro ellittico, vi è ancora il rapporto

$$a'a''=-\frac{b^2}{a^2};$$

dunque sarà

$$a'a''=\text{tang.}(x,x')\text{tang.}(x,y').$$

Fig. 15 Sia QP l' asse delle x', ed FK quello delle y' si avrà

$$\text{tang.}AOQ=\text{tang.}(x,x'),$$

e $$\text{tang.}AOF=\text{tang.}(x,y');$$

siano dippiù a', a'' le tangenti degli angoli $M'AT$, $M'A'A$, che fanno coll'asse delle ascisse rispettivamente le corde AM', $A'M'$; allora se si ha

$$a'=\text{tang.}(x',x),$$

per aver luogo l' equazione

$$a'a''=\text{tang.}(x',x)\text{tang.}(y',x),$$

sarà ancora

$$a''=\text{tang.}(y',x),$$

e le corde AM', $A'M'$ riusciranno rispettivamente parallele a diametri FK, QP. Egli è facile il dimostrare che lo stesso ha luogo, allor-

chè le corde si menano dagli estremi dell' asse minore ; giacchè allora l' equazione di condizione è

$$b^2\text{sen.}(y,x')\text{sen.}(y,y')+a^2\cos.(y,x')\cos.(y,y')=0\ ,$$

la quale da

$$\text{tang.}(y,x')\text{tang.}(y,y')=-\frac{a^2}{b^2}\ ,$$

rapporto identico a quello che fanno due corde menate dagli estremi dell' asse minore , ad uno stesso punto del perimetro ellittico [144].

157. Da questo processo puramente analitico ne tiriamo un metodo facile per menare in una ellisse , dati gli assi , due diametri conjugati sotto un dato angolo. Cioè si descriva sull' asse maggiore , o minore , secondocchè l' angolo dato è ottuso , o acuto un segmento di cerchio capace dell' angolo dato , ed indi da un punto , ove questo incontrerà il perimetro ellittico , simenino due corde, nel 1.° caso agli estremi dell' asse maggiore , e nel secondo agli estremi dell' asse minore : i diametri , che si meneranno paralleli rispettivamente a queste corde , saranno i diametri conjugati richiesti.

Infatti chiamando φ,θ gli angoli , che le corde fanno rispettivamente coll' asse dell' ascisse , si avrà , riguardo all' asse maggiore

$$\text{tang.}\,\varphi\,\text{tang.}\,\theta=-\frac{b^2}{a^2}\ ,\ (145)$$

o poicchè si ha pe 'l parallelismo delle corde , e de' diametri rispettivamente

$$\text{ang.}(x,x')=\varphi\ ,$$

ed

$$\text{ang.}(x,y')=\theta\ ,$$

sarà

$$\text{tang.}(x,x')\text{tang.}(x,y')=-\frac{b^2}{a^2}\ ,$$

ossia

$$\frac{\text{sen.}(x,x')}{\cos.(x,x')}\cdot\frac{\text{sen.}(x,y')}{\cos.(x,y')}=-\frac{b^2}{a^2}\ ,$$

da cui si tira

$$a^2\text{sen.}(x,x')\,\text{sen.}(x,y')+b^2\cos.(x,x')\cos.(x,y')=0\ ,$$

ch' è l' equazione di condizione [151].

158. Similmente se la costruzione si fa sull' asse minore si otterrà l' equazione di condizione corrispondente.

159. Allorchè l'angolo dato è maggiore di quello, che fanno due corde menate dagli estremi dell' asse maggiore ad uno degli estremi dell' asse minore, o è minore dell' angolo fatto ad uno degli estremi dell' asse maggiore, il problema è impossibile, giacchè non vi è in questa ipotesi intersezione del cerchio col perimetro ellittico (geom. 50).

160. Ma sciogliamo coll'ajuto della sola analisi indeterminata il problema di determinare *la posizione di due diametri conjugati sotto un dato angolo, dati gli assi.*

Siano OQ, OK i due semidiametri x', y'. L' equazione di OQ rapporto gli assi rettangolari dell' ellisse sarà

Fig. 15

$$y=\text{tang.}(x,x')x\ (29)\ ,$$

e quella di

$$OK,\ y=\text{tang}(x,y')x.$$

Ora poicchè si ha

$$\text{ang.}(x',y')=\text{ang}(x,y')-\text{ang.}(x,x')\ ,$$

sarà, come si è veduto (146)

$$\text{tang.}(x',y')=\frac{\text{tang.}(x,y')-\text{tang.}(x,x')}{1+\text{tang}(x,y')\text{tang}(x,x')}\ ;$$

sia $\downarrow$ la tangente dell' angolo dato ; dovrà essere per la condizione del problema

$$\frac{\text{tang.}(x,y')-\text{tang.}(x,x')}{1+\text{tang}(x,y')\text{tang.}(x,x')}=\downarrow$$

da cui si tira

$$\text{tang.}(x,y')=\frac{\downarrow+\text{tang.}(x,x')}{1-\downarrow\text{tang.}(x,x')}\ :$$

si sostituisca questo valore di tang.(x,y') nell' equazione di condizione posta sotto la forma

$$\text{tang.}(x,x')\text{tang.}(x,y')=-\frac{b^2}{a^2}\ ;$$

si avrà riducendo

$$\text{tang}^2(x,x')-\frac{(b^2-a^2)\downarrow}{a^2}\text{tang.}(x,x')=-\frac{b^2}{a^2}\ ,$$

da cui si tira

$$\text{tang.}(x,x')=\frac{(b^2-a^2)\downarrow\pm\sqrt{[\downarrow^2(b^2-a^2)^2-4a^2b^2]}}{2a^2}.$$

Similmente si ottiene

$$\text{tang.}(x,y')=\frac{-(b^2-a^2)\downarrow\pm\sqrt{[\downarrow^2(b^2-a^2)^2-4a^2b^2}}{2a^2}\ ,$$

e resterà con ciò determinata l' inclinazione de'

diametri in quistione all' asse delle ascisse.

161. L' espressioni di

$$\text{tang.}(x,y'),\text{tang}(x,x')$$

saranno imaginarie, allorchè si ha

$$4a^2b^2>\downarrow^2(b^2-a^2)^2,$$

ossia

$$2ab>-\downarrow(a^2-b^2),$$

cioè quando si avrà

$$\downarrow<-\frac{2ab}{a^2-b^2},$$

ch' è la tangente del massimo angolo, che possono formare due corde menate ad uno stesso punto del perimetro ellittico dagli estremi dell' asse maggiore (146) : in tal caso, essendo l' angolo dato maggiore del massimo, il problema è impossibile, come l' abbiamo riflettuto (not. (a) n°. 146). Collo stesso metodo si sarebbe sciolto il problema riguardo all' asse $2b$, eliminando

$$\text{tang.}(x',y)\text{ , o }\text{tang.}(y',y)$$

tra le due equazioni

$$\frac{\text{tang.}(x',y)-\text{tang.}(y',y)}{1+\text{tang.}(x',y)\text{tang.}(y',y)}=\epsilon$$

[indicando con ϵ la tangente dell' angolo

Fig. 15 $QOF=QOO'-FOO'=\text{ang.}(x',y)-\text{ang.}(y',y)$],

e $$\text{tang.}(x',y)\text{tang.}(y',y)=-\frac{a^2}{b^2}:$$

e si rileverà ancora essere impossibile il problema quando si ha

$$\iota < \frac{2ab}{a^2 - b^2},$$

ossia quando l' angolo dato è minore di quello fatto da due corde, che si menano ad uno degli estremi dell' asse maggiore dagli estremi dell' asse minore.

162. L' espressioni di

$$\text{tang.}(x,x'),\ \text{tang.}(x,y'),$$

sostituiti in esse i valori di a, e b (85) s'indichino rispettivamente con μ, λ, e poicchè si ha

$$\text{tang}\,(x,x') = \frac{\text{sen.}(x,x')}{\cos.(x,x')}\ (\text{trig.}\ 11) = \frac{\text{sen.}(x,x')}{\sqrt{[1 - \text{sen}^2(x-x')]}},$$

essendo

$$\cos(x,x') = \frac{1}{\text{seg}(x,x')} = \frac{1}{\sqrt{[1 + \text{tang}^2(x,x')]}}\ \text{a}$$

sarà.

$$\sqrt{[1 - \text{sen}^2(x,x')]} = \frac{1}{\sqrt{[1 + \text{tang}^2(x,x')]}},$$

e perciò si avrà

$$\text{sen.}(x,x') - \frac{\text{tang.}(x,x')}{\sqrt{[1 + \text{tang}^2(x,x')]}}$$

e quindi sarà

$$\cos.(x,x') = \sqrt{[1 - \text{sen}^2 x,x']} = \frac{1}{\sqrt{[1 + \text{tang}^2(x,x')]}};$$

cioè sostituendo i simboli qui assunti, sarà

$$\text{sen.}(x,x') = \frac{\mu}{\sqrt{[(1 + \mu^2)]}},$$

e

$$\cos.(x,x') = \frac{1}{\sqrt{[(1 + \mu^2)]}};$$

e per la stessa ragione sarà

$$\text{sen.}(x,y')=\frac{\lambda}{\sqrt{[(1+\lambda^2)']}},$$

e $$\cos.(x,y')=\frac{1}{\sqrt{[(1+\lambda^2)']}},$$

valori, che sostituiti in (2), la cambieranno in

$$\frac{a^2\lambda^2+b^2}{1+\lambda^2}y^2+\frac{a^2\mu^2+b^2}{1+\mu^2}x^2=a^2b^2,$$

che sarà l' equazione dell' ellisse rapportata a' diametri conjugati sotto l' angolo dato (a).

(a) Ecco come si potrebbe portare innanzi la soluzione analitica del presente problema, corrispondente alla costruzione geometrica qui sopra recata (157).

Sia O il centro del segmento capace del dato angolo: sia θ l' angolo dato. Se al punto B della retta BB' facciasi l'angolo $PBC=\theta$, sarà ancora, per l' ipotesi del problema, $PBX=B'nB$, e quindi la PQ sarà tangente del cerchio in B (geom. 131.); si unisca il centro O col punto B di contatto; sarà OB perpendicolare a PQ, e sarà il raggio del segmento capace del dato angolo (geom. 122). Ciò posto, l' equazione della retta PQ, che passa per B, ove si ha $m=a$, ed $n=0$ (24, 33), è $y=\text{tang}\,\theta(x-a)\ldots(1)$; quindi l' equazione di BO sarà $y=-\cot\theta(x-a)\ldots(2)$ (38). Egli è chiaro ora che tutto si riduce ad eliminare x, o y tra l' equazione di questo cerchio, e quella dell' ellisse, per indi determinare tang θ; poicchè le coordinate al centro di questo cerchio sono $b=CO$, $a=0$ (94, 24), bisogna determinare CO, per sostituirla in luogo di b nell' equazione (T) (94). Per ciò eseguire si faccia in (2) $x=0$; si avrà (24, 30) $CO=a\cot.\theta$, e 'l raggio OB che passa per O, e B distanti rispettivamente dall' origine per $a\cot.\theta$, ed a, sarà $a^2+a^2\cot.^2\theta$ (35). Con tali sostituzioni di valori per a, b, ed R nell' equazione (T) (94), essa diverrà dopo le convenienti riduzioni $y^2-2a\cot\theta\,y+x^2=a^2\ldots(3)$; or si ha $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2\ldots(4)$; Dunque tra (3), (4), eliminando x si avrà

$$(a^2-b^2)y^2+2ab^2\cot\theta\,y=0\ldots(5),$$

equazione, che viene soddisfatta da $y=0$, e da

163. Per portare queste ricerche sotto il massimo aspetto di generalità supponiamo, che la curva dell' equazione

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex-F=0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

si voglia rapportare a due diametri conjugati sotto un dato angolo. Sia t la tangente dell' angolo dato. Sulle prime l' equazione (1) per mezzo de' valori di a, e b (52, pag. 52) si ridurrà sotto la forma

$$Ay^2+Bxy+Cx^2-M=0; \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

indicando con M la quantità

$$F-Ab^2-Bab-Ca^2-Db+Ea \quad (52, \text{pag.} 52),$$

ossia la quantità

$$\frac{CD^2-EBD+AE^2-F(B^2-4AC)}{B^2-4AC} \quad (84, \text{pag.} 87).$$

$y=-\frac{2ab^2\cos\theta}{a^2-b^2}$, che si ha, dividendo l'equazione (5) per y, ed assolando questa variabile. E poicchè a' punti B, B' si ha $y=0$, il primo valore di y riguarda l' incontro del cerchio, e dell' ellisse in questi punti. Il valore di y avuto da (5) si sostituisca in (4), si avrà, fatte le debite riduzioni, $x=\pm\frac{a\sqrt{(\text{tang}^2\theta(a^2-b^2)^2-4a^2b^2)}}{\text{tang}\,\theta(a^2-b^2)}$, che sarà reale, se si ha $\text{tang}^2\theta(a^2-b^2)^2>4a^2b^2$, ossia $\text{tang.}\,\theta>\frac{2ab}{(a^2-b^2)}$ o pure $\text{tang}\,\theta<-\frac{2ab}{(a^2-b^2)}$, che sono ancora i limiti degli angoli fatti rispettivamente agli estremi dell'asse maggiore, o minore dalle corde menate dagli estremi dell'asse minore, o maggiore (146, e 147).

Indi l' equazione (2) trattata colle formole

$$y=\text{sen}(x',x)x'+\text{sen}(y',x)y',$$

ed $x=\cos(x',x)x'+\cos(y',x)y'$ (50, III)

darà la seguente trasformata

$$(7)\begin{cases}[A\,\text{sen}^2(y',x)+C\cos^2(y',x)+B\,\text{sen}(y',x)\cos(y',x)]y'^2\\ +[A\,\text{sen}^2(x',x)+C\cos^2(x',x)+B\,\text{sen}(x',x)\cos(x',x)]x'^2\\ \quad+2[A\,\text{sen}(x',x)\,\text{sen}(y',x)+C\cos(x',x)\cos(y',x)\\ +\frac{B}{2}\text{sen}(y',x)\cos(x',x)+\frac{B}{2}\text{sen}(x',x)\cos(y',x)]xy-M=0.\end{cases}$$

Affinchè questa equazione sia quella da noi richiesta, sulle prime la condizione de' diametri conjugati da luogo alla seguente equazione (57)

$$[A\,\text{sen}(x',x)\,\text{sen}(y',x)+C\cos(x',x)\cos(y',x)+$$
$$\frac{B}{2}\text{sen}(y',x)\cos(x',x)+\frac{B}{2}\text{sen}(x',x)\cos(y',x)=0\ldots\ldots(3)$$

e quella di dover questi fare un' angolo dato per mezzo della sua tangente $\downarrow$, fa sorgere l' altra equazione

$$\downarrow=\frac{\text{tag}(x',x)-\text{tang}(y',x)}{1+\text{tang}(x',x)\,\text{tang}(y',x)}(146),$$

da cui si tira

$$\text{tang}(x',x)\,\text{tang}(y'x)\downarrow-\text{tang}(x',x)+\text{tang}(y',x)+\downarrow=0\ldots(4)$$

si divida l' equazione (3) per

$$\cos(x',x)\cos(y',x),$$

essa diverrà

$$A\,\mathrm{tang}(x',x)\,\mathrm{tang}(y',x)+C+\frac{B}{2}\,\mathrm{tang}(y',x)+\frac{B}{2}\,\mathrm{tan}(x',x)=0\;(5)$$

allora eliminando successivamente

$\mathrm{tang}.(x',x)$, e $\mathrm{tang}(y',x)$ tra (4), e (5),

si avrà

$$\mathrm{tang}^2(y',x)+\left[\frac{C\downarrow-B-A\downarrow}{\frac{B}{2}\downarrow-A}\right]\mathrm{tang}(y',x)$$

$$-\frac{\left(C+\frac{B}{2}\downarrow\right)}{\frac{B}{2}\downarrow-A}=0\;.\;.\;(6),\text{ e}$$

$$\mathrm{tang}^2(x',x)+\left[\frac{C\downarrow+B-A\downarrow}{A+\frac{B}{2}\downarrow}\right]\mathrm{tang}(x',x)$$

$$+\frac{C-\frac{B}{2}\downarrow}{A+\frac{B}{2}\downarrow}=0\;.\;.\;.\;.\;(7).$$

Queste due equazioni (6), e (7) non racchiudono, che una sola condizione, giacchè una dipende dall' altra, e la condizione è quella appunto di dover rapportata la curva a de' diametri conjugati sotto il dato angolo. Per farne la sostituzione de' valori di

$\mathrm{tang}(x',x)$, e $\mathrm{tang}(y'x)$

nella trasformata (τ), bisogna prima esprimere

in essa i coefficienti della indeterminata in funzione di

$$\tang(x',x)\ ,\ \text{e}\ \tang(y'x).$$

A tal effetto, essendo

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sen^2\alpha \ (\text{trig. } 30),$$

se in questa equazione mettiamo successivamente $1-\sen^2\alpha$ in luogo di $\cos^2\alpha$, ed $1-\cos^2\alpha$ in luogo di $\sen^2\alpha$, si avrà in primo luogo

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sen^2\alpha \quad \ldots \ (8),$$

e

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \quad \ldots \ (9).$$

L' equazione (8) ci da

$$\sen^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \quad \ldots\ldots \ (10),$$

e l' altra (9) ci da

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \quad \ldots \ (11);$$

si sostituisca in (10), ed (11) in luogo di $\cos 2\alpha$ il suo valore

$$\frac{1}{\sqrt{[1+\tang^2 2\alpha]}} (162),$$

si avrà

$$\sen^2\alpha = \frac{\sqrt{[1+\tang^2 2\alpha]}-1}{2\sqrt{[1+\tang^2 2\alpha]}},\ \text{e}\ \cos^2\alpha = \frac{\sqrt{[1+\tang^2 2\alpha]}+1}{2\sqrt{[1+\tang^2 2\alpha]}}.$$

Dippiù, essendo

$$\sen\alpha \cos\alpha = \frac{\sen 2\alpha}{2} \ (\text{trig. } 30),$$

esprimendo $\sen 2\alpha$ per mezzo della sua tangente,

(162), sarà

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=\frac{\operatorname{tang}2\alpha}{2\sqrt{[1+\operatorname{tang}^2 2\alpha]}}.$$

E con tali riduzioni, l' equazione (τ) diverrà

$$\left.\begin{aligned}
&\Bigg[A\left(\sqrt{\frac{[1+\operatorname{tang}^2 2(y',x)]-1}{4+4\operatorname{tang}^2 2(y',x)}}\right)+\\
&\quad C\left(\sqrt{\frac{[1+\operatorname{tang}^2 2(y',x)]+1}{4+4\operatorname{tang}^2 2(y',x)}}\right)+\\
&\quad B\frac{\operatorname{tang}^2 2(y',x)}{2\sqrt{[1+\operatorname{tang}^2 2(y',x)]}}\Bigg]y^2+\\
&\Bigg[A\left(\sqrt{\frac{[1+\operatorname{tang}^2 2(x',x)]-1}{4+4\operatorname{tang}^2 2(x',x)}}\right)+\\
&\quad C\left(\sqrt{\frac{[1+\operatorname{tang}^2 2(x',x)]+1}{4+4\operatorname{tang}^2 2(x',x)}}\right)+\\
&\quad B\frac{\operatorname{tang}2(x',x)}{2\sqrt{[1+\operatorname{tang}^2 2(x',x)]}}\Bigg]x^2
\end{aligned}\right\}(\tau')$$

$$+2\left[A\operatorname{tang}[x',x]\operatorname{tang}[y',x]+C+\frac{B}{2}\operatorname{tang}[y',x]+\frac{B}{2}\operatorname{tang}[x',x]\right]xy$$

$$-\frac{[CD^2-EBD+AE^2-F(B^2-4AC)]}{B^2-4AC}=0.$$

164. Ciò posto si tirino dall' equazioni [6], e [7] i valori di

$$\operatorname{tang}[y',x],\operatorname{tang}[x',x],$$

e rilevat' i valori di

$$\text{tang}2[y',x],\ e\ \text{tang}2[x',x]\ [\text{trig}.56],$$

se ne facciano le sostituzioni nell'equazione $[r']$: l'equazione risultante sarà quella della curva rapportata a' diametri conjugati sotto il dato angolo. Degli esempj renderanno più chiaro queste cose.

165. Sia l'equazione

$$5y^2+6xy+5x^2+6y\sqrt{2}+10x\sqrt{2}+2=0\ \ldots\ [8].$$

La quale voglia rapportarsi a de' diametri conjugati, che facciano un angolo, la cui tangente sia $-\frac{5}{3}$. L' equazioni [6], e [7] daranno rispettivamente

$$\text{tang}[x,y']=-\frac{5}{3},\ e\ \text{tang}[x,x']=0\ :$$

Quindi si avrà, per essere l'angolo (x,y') ottuso (155)

$$\text{tang}2[x,y']=-\frac{30}{16}\ ;$$

cosicchè sostituiti questi valori in $[r']$ si avrà

$$\frac{5\sqrt{\left[\frac{1156}{256}\right]}-5+5\sqrt{\left[\frac{1156}{256}\right]}+5-\frac{180}{16}}{\sqrt{\left[4+4\frac{900}{256}\right]}}y'^2+5x'^2-8=0$$

la quale ridotta darà

$$\frac{80}{34}y'^2+5x'^2-8=0$$

equazione ad un' ellisse rapportata a de' diametri conjugati sotto l' angolo dato, ed i valori de' diametri si avranno, o mettendo in quest' equazione successivamente $y=0$, $x=0$, o pure dalle formole come in appresso [178].

166. Segue da tutto ciò, che noi possiamo agevolmente, dietro le formole [6], e [7] ridurre un' equazione quadratica tra due indeterminata a quella tra diametri conjugati di un dato angolo, determinando cioè coll' equazioni [6'] e [7] i valori di

$$\text{tang}[x,y'], \text{tang}[x,x'],$$

ed indi coll' equazioni

$$\text{sen}[x,y'] = \frac{\text{tang}[x,y']}{\sqrt{[1+\text{tang}^2(x,y')]}}, \text{ e}$$

$$\cos[x,y'] = \frac{1}{\sqrt{[1+\text{tang}^2(x,y)}},$$

i valori di

$$\text{sen}[x,y'], \text{ e } \cos[x,y'];$$

sostituendone i valori nell' equazioni

$$y = \text{sen}(x,x')x' + \text{sen}(x,y')y' + \frac{2CD-BE}{B^2-4AC} \quad (52),$$

ed

$$x = \cos(x,x')x' + \cos(x,y')y' + \frac{2AE-ED}{B^2-4AC},$$

ed in fine ricercando la trasformata colla sostituzione de' valori di x, ed y uell' equazione data.

167. Così nel caso n°., essendo

$$\tang(x,y')=-\frac{5}{3}\ ,\ \text{e}\ \tang(x,x')=0\ ,$$

si avrà

$$\text{sen}(x,y')=-\frac{5}{\sqrt{34}}\ ,$$

e

$$\cos(x,y')=\frac{3}{\sqrt{34}}\ ;$$

$$\text{sen}(x,x')=0\ ,\ \text{e}\ \cos(x,x')=1\ ;$$

$$b=\frac{2CD-BE}{B^2-4AB}=0\ ,$$

ed

$$a=\frac{2AE-BC}{B^2-4AC}=-\sqrt{2}\ ;$$

e quindi si avrà

$$y=-\frac{5}{\sqrt{34}}y'\ ;$$

ed

$$x=x'+\frac{3}{\sqrt{34}}y'-\sqrt{2},$$

e con tali sostituzioni l' Equazione [8] darà

$$\frac{80}{34}y'^2+5x'^2-8=0,$$

come abbiamo ritrovato qui sopra.

168. Lo stesso ha luogo per gli assi rettangolari. Così se vogliamo rapportare l' ellisse dell' equazione [8] a'suoi assi primitivi, ed al centro, le formole

$$\text{sen}(x',x)=\sqrt{\left[\frac{1}{2}-\frac{(C-A)}{2\sqrt{[(C-A)^2+B^2]}}\right]},$$

e $\cos(x',x)=\sqrt{\left[\frac{1}{2}+\frac{C-A}{2\sqrt{[(C-A)+B^2]_2}}\right]}$ (69)

ci danno

$$\text{sen}(x',x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ \cos(x',x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$

ed essendo parimente $b=0$, ed $a=-\sqrt{2}$, come abbiamo veduto (prec.), se sostituiremo questi valori nelle formole

$$y=\text{sen}(x,x')x'+\cos(x,x')y'+b\ ,\ \text{ed}\ (50,IV),$$
$$x=\cos(x,x')x'-\text{sen}(x,x')y'+a\ ,$$

si avrà

$$y=\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}\ ;$$

ed

$$x=\frac{x'}{\sqrt{2}}-\frac{y'}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\ ,$$

e colla sostituzione de' valori di y, ed x nell'equazione [8], si avrà

$$4y'^2+x'^2=4\ ,$$

ossia

$$y'^2=\frac{1}{4}(4-x'^2)\ ,$$

che sarà l' equazione dell' ellisse designata da [8], ma rapportata agli assi 4, e 2.

169. Similmente se si vuol rapportare al centro ed a' suoi assi l' ellisse dell' equazione

$$y^2-2xy+2x^2-2x=0$$

si avrà

$$\operatorname{sen}(x,x')=\sqrt{\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right]},$$

e $$\cos(x,x')=\sqrt{\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right]};\quad a=1\ ,\ b=1\ ,$$

valori, che sostituiti nelle formole [50,IV] daranno per trasformata

$$\frac{(3+\sqrt{5})}{2}y'^2+\frac{(3-\sqrt{5})}{2}x'^2=1\ ;$$

e sarà questa l' equazione richiesta.

170. Nello stesso modo si troverà, che rapportando al centro, ed a' suoi assi l'ellisse dell' equazione

$$5y^2+2xy+5x^2-12y-12x=0$$

si avrà

$$2y'^2+3x'^2=6.$$

171. Se nell'equazione [(2),151] facciamo successivamente

$$y'=0\ ,\ x'=0\ ,$$

si avrà

$$x'=\pm\frac{ab}{\sqrt{[a^2\operatorname{sen}^2(x',x)+b^2\cos^2(x',x')]}}\ ,$$

ed

$$y'=\pm\frac{ab}{\sqrt{[a^2\operatorname{sen}^2(y',x)+b^2\cos^2(y',x)}}\ ,$$

e questo ci dimostra che due diametri conjugati sono divisi per metà al centro.

172. Poniamo

$$\frac{ab}{\sqrt{[a^2\operatorname{sen}^2(x',x)+b^2\cos^2(x',x)]}}=a'\ ,$$

ed

$$\frac{ab}{\sqrt{[a^2\text{sen}^2(y',x)+b^2\cos^2(y',x)]}}=b';$$

indi dividiamo amb'i membri dell' equazione (2) pe'l prodotto da' coefficienti di y'^2, ed x'^2, moltiplicando tutto per a^2b^2, si avrà

$$\frac{a^2b^2}{a^2\text{sen}^2(x',x)+b^2\cos^2(x',x)}y'^2+$$

$$\frac{a^2b^2}{a^2\text{sen}^2(y',x)+b^2\cos^2(y',x)}x'^2=$$

$$\frac{a^2b^2}{a^2\text{sen}^2(x',x)+b^2\cos^2(x',x)}\cdot\frac{a^2b^2}{a^2\text{sen}^2(y',x)+b^2\cos^2(y',x)}$$

la quale, dietro i valori di a', e b' diverrà

$$a'^2y^2+b'^2x^2=a'^2b'^2,$$

equazione simile a quella rapportata agli assi.

173. Riduciamo l' equazione

$$a'^2=\frac{a^2b^2}{a^2\text{sen.}^2(x',x)+b^2\cos.^2(x',x)}\text{(prec.)},$$

mercè la condizione

$$\cos.^2(x',x)=1-\text{sen.}^2(x',x),$$

si avrà

$$a'^2=\frac{a^2b^2}{(a^2-b^2)\text{sen.}^2(x',x)+b^2}.$$

Questa espressione sarà un massimo, o un minimo, secondocchè il denominatore avrà il minimo, o il massimo valore (Geom. 169), ossia secondocchè $\text{sen.}^2(x',x)$, ch' è la sola quantità variabile avrà un minimo, o un massimo

valore, cioè quando sarà
sen.$(x',x)=0$, o pure sen.$(x',x)=1$ (trig.3,17,18); nel primo caso sarà $a'=a$, e nel secondo $a'=b$; dunque l'asse $2a$ sarà il massimo, e l'altro $2b$ il minimo di tutt' i diametri.

174. L'equazione

$$a'^2y'^2+b'^2x'^2=a'^2b'^2$$

dell'ellisse riguardo a' diametri conjugati obbliqui, che abbiamo qui sopra rilevata (172), si rapporti a delle coordinate rettangolari mercè le note formole (48)

$$x'=\frac{x\,\text{sen.}(y',x)-y\cos.(y',x)}{\text{sen.}(x',y')};$$

$$y'=\frac{y\cos.(x',x)-x\,\text{sen.}(x',x)}{\text{sen.}(x',y')}\ (a);$$

riuniti in un sol termine i coefficienti di y^2, e di x^2, e di xy, si avrà, dopo le riduzioni convenienti

$$\left.\begin{array}{c}[a'^2\cos^2(x',x)+b'^2\cos^2(y',x)]y^2\\ +[a'^2\text{sen}^2(x',x)+b'^2\text{sen}^2(y',x)]x^2-\\ 2[(a'^2\text{sen}(x',x)\cos(x',x)+b'^2\text{sen}(y',x)\cos(y',x)]xy=\\ a'^2b'^2\text{sen}^2(x',y').\end{array}\right\}(\alpha)$$

Questa equazione deve essere quella dell'ellisse rapportata agli assi rettangolari coll' origine delle coordinate al centro; quindi per esser identica all' altra

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$$

(a) Il denominatore di queste formole equivale a quello delle formole recate (48), giacchè si ha ang $(x',y')=$ ang $(y',x)-$ ang (x',x).

fa d' uopo che sia

$$a'^2\cos^2(x,x')+b'^2\cos^2(y',x)=a^2 \quad . \; . \; . \; (m)$$

$$a'^2\text{sen}^2(x',x)+b'^2\text{sen}^2(y',x)=b^2 \quad . \; . \; . \; (n)$$

$$a'^2b'^2\text{sen}^2(x',y')=a^2b^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (p)$$

$$a'^2\text{sen}(x',x)\cos(x',x)+b'^2\text{sen}(y',x)\cos(y',x)=0. \; (q).$$

Si sommino l' equazioni (m), ed (n); riducendo mercè la condizione

$$\text{sen}^2(x',x)+\cos^2(x',x)=1, \; \text{sen}^2(y',x)+\cos^2(y',x)=1,$$

si avrà

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2 \quad . \; . \; . \; (1)$$

da cui se ne deduce, che nell' ellisse *la somma de' quadrati degli assi è eguale a quella de' quadrati di due diametri conjugati.*

175. Dippiù l' equazione (p) ci da

$$a'b'\text{sen}(x',y')=ab\,;$$

ora l' angolo (x',y') è lo stesso angolo contenuto da' diametri obbliqui a', b'; dunque sarà

$$a'b'\text{sen}(a',b')=ab,$$

e $$4a'b'\text{sen}(a',b')=4ab \quad . \; . \; . \; (2)$$

ma l' espressione

$$4a'b'\text{sen}(a',b'),$$

è quella all' aja del parallelogrammo contenuto da' diametri $2a'$, $2b'$, che rappresentiamo sulla figura colle rette PQ, FG, il cui parallelogrammo è $TtT't'$ (trig. 67). Dunque *in ogni ellisse il rettangolo degli assi è eguale al parallelogrammo fatto da due diametri conjugati.*

Tav. II Fig. 19

176. Siano $2a''$, $2b''$ il sistema di due altri diametri conjugati, si avrà perciò

$$a''^2+b''^2=a^2+b^2,$$

e

$$4a''b''\text{sen}(a'',b'')=4ab;$$

quindi sarà

$$a''^2+b''^2=a'^2+b'^2,$$

e

$$4a''b''\text{sen}(a'',b'')=4a'b'\text{sen}(a',b'),$$

da cui ne conchiuderemo, che nell' ellisse, *i quadrati de' diametri conjugati sono tutti eguali fra loro, e sono parimente eguali tutt' i parallelogrammi fatti da due diametri conjugati, e quindi tutt' i parallelogrammi circoscritti ad una stessa ellisse, allorchè però i lati di essi sono paralleli a due diametri conjugati* (a).

177. Mettiamo l' equazione dell' ellisse riguardo a' diametri conjugati obbliqui sotto la forma

$$Q'y^2+P'x^2=M \;.\;.\;. \;(G),$$

si avrà

$$Q'=a'^2,\; P'=b'^2,$$

ed

$$M=a'^2b'^2;$$

allora l' equazione (α) diverrà

(a) Questa condizione è necessaria, per conchiudere che due parallelogrammi circoscritti all' ellisse sono eguali: imperciocchè, se dagli estremi di due diametri qualunque, si menano le tangenti, e queste si prolunghino finchè s' incontrano, la figura, che ne risulterà, sarà anche un parallelogrammo, ma non eguale al rettangolo degli assi, com' è agevole il dimostrarlo.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{[Q'\cos^2(x',x)+P'\cos^2(y',x)]}{\operatorname{sen}^2(x',y')}\,y^2+\\[2ex]\dfrac{[Q'\operatorname{sen}^2(x',x)+P'\operatorname{sen}^2(y',x)]x^2+}{\operatorname{sen}^2(x',y')}\\[2ex]\dfrac{2[(Q'\operatorname{sen}(x'x)\cos(x',x)+P'\operatorname{sen}(y',x)\cos(y',x)]xy=M)}{\operatorname{sen}^2(x',y')}\end{array}\right\}(\alpha')$$

Questa equazione si paragoni all' altra

$$Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2=M[52,(3)],$$

ch' è l' equazione delle curve a centro, si avrà

$$Q,\cos^2(x',x)+P'\cos^2(y',x)=A\operatorname{sen}^2(x',y')$$

$$Q'\operatorname{sen}^2(x',x)+P'\operatorname{sen}^2(y',x)=C\operatorname{sen}^2(x',y')$$

$$Q'\operatorname{sen}(x',x)\cos(x',x)+P'\operatorname{sen}(y';x)\cos(y',x)=\frac{B}{2}\operatorname{sen}^2(x',y').$$

Se le due prime equazioni si sommino, e si riduca mercè la condizione

$$\operatorname{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi=1,$$

si avrà

$$P'+Q'=(A+C)\operatorname{sen}^2(x',y')\ \ldots\ (\beta).$$

Similmente se dal prodotto delle due prime se ne sottegga il quadrato dell' altra; si avrà

$$Q'P'=\left(A.C-\frac{B^2}{4}\right)\operatorname{sen}^2(x',y')\ \ldots\ (\gamma).$$

Dall' equazione (β) elevata a quadrato, si sottragga il quadruplo dell' equazione (γ), si avrà riducendo, ed estraendo la radice seconda

$$(P'-Q')=$$

$$\text{sen}(x',y') \sqrt{\left[(A+C)^2\text{sen}^2(x',y')-4\left(AC-\frac{B^2}{4}\right)\right]} \ldots (\delta):$$

allora l' equazioni (β), e (δ) ci daranno, mediante la somma, e la sottrazione

$$\left.\begin{aligned} P' &= \tfrac{1}{2}\Big[(A+C)\text{sen}^2(x',y')+ \\ &\text{sen}(x',y')\sqrt{\left[(A+C)^2\text{sen}^2(x',y')-4\left(AC-\frac{B^2}{4}\right)\right]}\Big] \\ Q' &= \tfrac{1}{2}\Big[(A+C)\text{sen}^2(x',y')- \\ &\text{sen}(x',y')\sqrt{\left[(A+C)^2\text{sen}^2(x',y')-4\left(AC-\frac{B^2}{4}\right)\right]}\Big] \end{aligned}\right\}\ldots(\varphi)$$

Ciò posto si è avuto al disopra (69 pag. 69)

$$P=\tfrac{1}{2}\,[(C+A)+\sqrt{([(C-A)^2+B^2])}],$$

e $$P=\tfrac{1}{2}\,[(C+A)-\sqrt{([(C-A)^2+B^2])}].$$

Si mettano queste equazioni sotto la seguente forma

$$\left.\begin{aligned} P &= \tfrac{1}{2}\left[(C+A)+\sqrt{\left[(A+C)^2-4\left(AC-\frac{B^2}{4}\right)\right]}\right] \\ Q &= \tfrac{1}{2}\left[(C+A)-\sqrt{\left[(A+C)^2-4\left(AC-\frac{B^2}{4}\right)\right]}\right] \end{aligned}\right\}(\varphi')$$

Se si paragonano queste equazioni alle altre due (φ), si osserverà che i coefficienti P', Q' dall' equazione all' ellisse trà diametri conjugati obbliqui si compongono dalle quantità A, B, C dell' equazione [(3), 52], nello stesso modo, che i coefficienti P, e Q dell'equazione alla stessa curva tra gli assi rettangolari. Infatti le formole (φ) si trasformeranno nelle altre φ'

supponendo $\text{sen}(x'.y')=1$, ossia supponendo rettangolari gli assi x', y'.

178. Ciò posto, essendo

$$[52,(3)]-M=Ab^2+Bab+Ca^2+Db+Ea-F=$$
$$\frac{CD^2-EBD+AE^2-F(B^2-4AC)}{B^2-4AC}\ (84,\ [n']),$$

l'equazione (G) diverrà

$$\left[\left(\frac{A+C}{2}\right)\text{sen}^2(x',y)-\right.$$
$$\left.\text{sen}(x',y)\sqrt{A(+C)^2\text{sen}^2(x',y')-4\left(AC-\frac{B^2}{4}\right)}\right]y^2$$
$$+\left[\frac{(A+C)}{2}\text{sen}^2(x',y')+\right.$$
$$\left.\text{sen}(x',y')\sqrt{(A+C)^2\text{sen}^2(x',y')-4\left(BC-\frac{B^2}{4}\right)}\right]x^2$$
$$+\frac{CD^2-E.B.D+A.E^2-F(B^2-4AC)}{B^2-4AC}=0,$$

e si avrà

$$2a'=\pm$$
$$2\sqrt{\left[\frac{-(C.D^2-E.B.D+A.E^2-F(B^2-4AC))}{(B^2-4AC\left[\frac{(A+C)}{2}\text{sen}^2(x',y')\mp\text{sen}(x',y')\sqrt{((A+C)^2\text{sen}^2(x',y')-4\left(AC-\frac{B^2}{4}\right)}\right]}\right]},$$

e

$$2b'=\pm$$
$$2\sqrt{\left[\frac{-(C.D^2-E\,B\,D+A\,E^2-F(B2-4AC))}{(B^2\cdot4AC)\left[\frac{(A\mp C)}{2}\text{sen}^2(x',y')-\text{sen}(x',y')\sqrt{((A+C)^2\text{sen}^2(x',y')-4\left(AC-\frac{B^2}{4}\right)}\right]}\right]},$$

e saranno questi i valori di due diametri

coniugati, l'angolo de' quali è ang(x',y'), con che si potrà immediatamente un ellisse rapportare a due diametri conjugati sotto un dato angolo, e dall' equazione generale averne la trasformata per questi, problema, che abbiamo parimente trattato al disopra (160, 162, 163). Egli è chiaro, che le formole [(m'),84], ed (S), e (T) (85) rientrano rispettivamente in queste quì rapportate, allorchè si ha

$$\text{sen}[x',y']=1.$$

179. Quindi tutte le proprietà, che abbiamo dimostrate riguardo agli assi, e che non dipendono dall' inclinazione de' diametri, competono a' due diametri conjugati obbliqui. E sulle prime Fig. 19 siano PQ, KF rispettivamente i diametri delle x', e delle y'; chiamiamo x'' una retta PQ', sarà

$$x'=a'-x'',$$

e l' equazione

$$y'^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x'^2)$$

diverrà

$$y'^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax''-x''^2),$$

ch' è l' equazione dell' ellisse rappottata al vertice del diametro $2a'$, e ch' è simile a quella che riguarda il vertice dell'asse maggiore (115). Ambidue queste equazioni poste rispettivamente sotto la forma

$$\frac{y'^2}{(a'+x')(a'-x')}=\frac{b'^2}{a'^2},$$

ed

$$\frac{y'^2}{x''(2a-x'')}=\frac{b'^2}{a'^2}$$

mirano ad una stessa proprietà; e ci dimostrano, come riguardo agli assi, *che il quadrato di una semiordinata ad un diametro qualunque è al rettangolo delle ascisse da entrambi i vertici, come il quadrato del diametro conjugato al primo è al quadrato di questo*, proprietà che avendo luogo generalmente per tutte le semiordinate, ci fa conchiudere, *che i quadrati delle semiordinate a' diametri conjugati sono tra loro come i prodotti delle ascisse entramb' i vertici.*

180. Segue da ciò, che se le ordinate NR, PQ all' asse di un' ellisse s' inclino sotto un dato angolo, come $N'R'$, $P'Q'$, poicchè ha anche luogo la condizione Fig. 22

$$\frac{MP'^2}{ON'^2}=\frac{AM\,.\,MA'}{AO\,.\,OA'},$$

ne viene, che i punti P', N', R', Q' apparterranno anche ad una ellisse.

181. Dunque, se dati due diametri conjugati, e l' angolo che fanno tra loro, si voglia descrivere un' ellisse basterà descrivere un ellisse su di essi, come se fossero gli assi, ed indi inclinare le ordinate PQ, NR all' asse AA' sotto il dato angolo senza farle cambiar di lunghezza; i punti N', P', Q', R' segueranno il perimetro dell' ellisse che si domanda, rapportata, cioè, a' diametri conjugati inclinati sotto l' angolo dato.

182. Le stesse conseguenze si dedurrebbero, prendendo il diametro $2b'$ per quello delle ascis e;

allora ordinando l' equazione rispetto ad x'^2, si avrà

$$x'^2 = \frac{a'^2}{b'^2}(b'^2 - y'^2),$$

la quale si cambia in

$$x'^2 = \frac{a'^2}{b'^2}(2b'y'' - y''^2),$$

allorchè l' origine si rapporta al vertice.

183. Chiamiamo p' il parametro del diametro $2a'$, si avrà

$$p' = \frac{2b'^2}{a'}(125),\ \text{e}\ \frac{p'}{2a'} = \frac{b'^2}{a'^2},$$

valore che sostituito nell' equazioni dell'ellisse pe' diametri conjugati obbliqui, e rapportata al centro, ed al vertice, le cambierà rispettivamente in

$$y'^2 = \frac{p'}{2a'}(a'^2 - x'^2),\ y'^2 = \frac{p'}{2a'}(2a'x'' - x''^2),$$

le quali messe sotto la forma

$$\frac{y'^2}{(a'+x')(a'-x')} = \frac{p'}{2a'},\ \frac{y'^2}{x''(2a'-x'')} = \frac{p'}{2a'},$$

$$\frac{x'^2}{(b'+y')(b'-y')} = \frac{p''}{2b'}\ \ \frac{x'^2}{y''(2b'-y'')} = \frac{p''}{2b'},$$

ci dimostreranno, come per gli assi, *che i quadrati delle semiordinate a' diametri secondarj sono a' rettangoli delle ascisse da entramb' i vertici com' è il parametro al diametro.*

Fig. 21. 184. Quindi adattato il parametro AS del diametro

$$AA'=2a',$$

parallelamente al suo conjugato BB', chiamando come sopra [131] m', n' le coordinate al punto S, ed m, n le coordinate al punto A', e fissando A per origine del sistema AS, AA', poichè al punto S si ha

$$m'=0, n'=p',$$

ed al punto A' si ha

$$n=0, \text{ ed } m=2a',$$

l'equazione della retta SA', che passa per questi punti, sarà

$$y=\frac{p'}{2a'}(2a'-x'')=PQ,$$

e quindi si avrà

$$AP.PQ=\frac{p'}{2a'}(2a'x''-x''^2)=PO^2.$$

dal che ne conchiuderemo, chiamando regolatrice la retta SA', che anche riguardo a' diametri conjugati ha luogo la proprietà, *che il quadrato di una semiordinata è eguale al rettangolo fatto dall' ascissa corrispondente nella semiordinata prolungata fin all' incontro della regolatrice, e che perciò è minore del rettangolo dell' ascissa nel parametro.*

185. Rappresenti la figura $Km'K'm$ una linea di 2°. grado a centro, e sia segata da una retta $n'nQ$. Se si domandano le coordinate AR, Rn, AF, Fn' comuni alla curva, ed alla retta segante, bisogna eliminare x, o y tra le due equazioni

Tav. IV Fig. 3.

$$Ay^2+Bxy+Cx^2-M=0,$$

ch' è l' equazione delle curve a centro, ed

$$y=A'x+B',$$

equazione alla linea retta. Si elimini y, si avrà
$[C+AA'^2+BA']x^2+[2AA'+B]B'x+AB'^2-M=0$
che darà

$$x=-\frac{[2AA'+B]B'}{2(C+AA'^2+BA')}+$$

$$\sqrt{\left[\frac{[2AA'+B]B'}{2[C+AA'^2+BA']}\right]^2-AB'^2+M},$$

$$x=-\frac{[2AA'+B]B'}{(2C+AA'^2+BA')}-$$

$$\sqrt{\left[\frac{[2AA'+B]B'}{2[C+AA'^2+BA']}\right]^2-AB'^2+M},$$

questi sono i due valori delle x corrispondenti a' punti n', n, ossia sono i valori rispettivi dell' ascisse AF, AR. Quindi prendendone la somma ed indicandola con $2X$, si avrà

$$2X=-\frac{(2AA'+B)B'}{(C+AA'^2+BA')},$$

la cui metà X è l'ascissa del punto o metà della corda nn', si avrà perciò

$$X=-\frac{(2AA'+B)B'}{2(C+AA'^2+BA')},$$

e l' ordinata a questo punto sarà per conseguenza

$$Y=A'X+B'.$$

Si elimini B' tra queste due equazioni, con che viene a considerarsi il sistema delle corde,

che differiscono per B', e non già per A', e che perciò sono parallele tra loro, si avrà il luogo de' punti medii delle corde parallele; l'eliminazione da

$$(2AA'+B)Y+(BA'+2C)X=0,$$

equazione di una retta, che passa pe 'l centro origine delle coordinate [26, e 27]; dal che ne segue, che *la retta, la quale divide per metà più corde parallele, passa pe 'l centro*.

186. Quindi se si vuole determinare il centro di una ellisse, basterà condurre in essa a piacere due corde parallele, e per i punti di mezzo di queste menarci una retta, la quale si prolungherà fino a che incontra dall' una, e l' altra parte il perimetro ellittico; la metà di questa sarà il centro della curva.

187. Se l' ordinata nn' con un moto a se parallelo vada movendosi, finchè i punti n, n' si riuniscano in un solo K, essa diverrà tangente al punto K, come si vedrà in appresso, e ciascuna delle semiordinate on, on' diverrà KT, cosicchè il punto K di contatto potrà considerarsi come il punto di mezzo di una ordinata parallela a KT (a); quindi la retta Ko dovrà passare pe 'l centro; dal che ne segue, che una retta, la quale passa pel punto, ove una tan-

(a) Si osserverà in appresso, che se $y^2+Py+C=0$, indichi i valori di due semiordinate diseguali HB', HB prese per rispetto a due diametri qualunque AA', QP, la condizione, affinche la ordinata BB' divenga tengente è $P=0$, cosicchè ciascheduna di quelle semiordinate diverranno $\sqrt{C}$, e quindi eguali fià loro: possiamo dunque riguardare il punto di contatto di una retta col perimetro della curva come quello corrispondente a' punti di mezzo delle ordinate parallele alla tangente. Tav III Fig. 15.

gente incontra il perimetro ellittico, e per la metà di una ordinata parallela a questa tangente passerà benanche pe'l centro.

188. Vediamo, se l'inversa è anche vera, cioè menando un diametro pe'l punto K di contatto, o che val lo stesso, per un punto o metà di un' ordinata qualunque, (nota prec.) questo divida per metà tutte le altre ordinate parallele.

A tal effetto mettiamo l'equazione generale trasformata [151,(1)] sotto la forma

$$y'^2+Px'y'+Qx'^2+R=0:$$

Fig.15 chiamiamo AA' il diametro delle x', e QP condotta pe'l centro parallelamente ad una tangente TF sia il diametro delle y'; poicchè in ogni equazione il coefficiente del secondo termine col segno cambiato è eguale alla somma delle sue radici, sarà, prendendo un' ascissa

$$OH=x', HB'-HB=-P.OH.$$

Se l'ordinata BB' si vada a distendere sulla tangente TF, l'ascissa corrispondente sarà OT, e si avrà (nota prec.)

$$2TF=-P.OT;$$

e quindi sarà

$$HB'-HB : 2TF=OH : OT:$$

ciò posto dal punto F di contatto meniamo il diametro FK; si avrà

$$2HI : 2TF=OH : OT;$$

e quindi sarà

$$HB'-HB : 2TF=2HI : 2TF,$$

cioè

$$HB' - HB = 2IH,$$

da cui si tira

$$HB' - HI = HB + HI,$$

cioè

$$BI = IB';$$

similmente può dimostrarsi, che tutte le altre ordinate menate parallelamente alla tangente TF sono divise per metà dal diametro FK. Siano PR, TM due tangenti; meniamo da' punti di contatto, M, e P i diametri MK, PQ rispettivamente paralleli a quelle tangenti, ciascuno di essi dividerà per metà le ordinate condottegli parallelamente all'altro (prec.); dunque l' equazione della curva riguardo ad essi avrà i soli quadrati delle variabili, ed essi saranno in conseguenza conjugati (57), dal che ne segue, che *nell' ellisse ogni diametro divide per metà tutte le ordinate condottegli parallele alla tangente menata da uno de' suoi estremi, e che sono conjugati due diametri, i quali sono rispettivamente paralleli alle tangenti menate pe' loro vertici.*

189. Questo da luogo ad una costruzione semplicissima, per mezzo della quale possiamo, dato un diametro trovar la posizione del suo conjugato, per mezzo della tangente, e viceversa. Nel 1.° caso, s' è dato un diametro MK, basta saper menare dal punto K, o M una tangente MT alla curva, ed indi condurre il diametro PQ parallelo ad essa tangente; è chiaro, che questo sarà il conjugato di MK. Nel 2.°, se da un punto M si vuol menare una tangente, condotto per esso il diametro MK,

ed indi, ritrovato il suo conjugato PQ (154), si meni MT parallela a PQ, sarà questa la tangente richiesta.

Fig. 23 190. Se dagl'estremi del diametro BB' meniamo due corde BO, $B'O$, una di esse avrà per equazione

$$y' = A(x' + a'),$$

e l'altra

$$y' = A'(x' - a');$$

moltiplichiamo quest'equazioni si avrà

$$y'^2 = -AA'(a'^2 - x'^2):$$

se le due rette si vanno ad incontrare sul perimetro dell'ellisse, vi sarà luogo alla condizione

$$y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(a'^2 - x'^2);$$

ma in tal ipotesi anche l'equazione

$$y'^2 = -AA'(a'^2 - x'^2),$$

è alla medesima ellisse, e tra le stesse coordinate; dunque queste due equazioni saranno identiche, e si avrà in conseguenza

$$AA' = -\frac{b'^2}{a'^2};$$

dal che ne segue, che siccome riguardo agli assi, il prodotto delle tangenti degli angoli, che due corde menate dagli estremi dell'asse maggiore fanno coll'asse delle ascisse, è espresso da $-\frac{b^2}{a^2}$, così riguardo a' diametri conjugati il prodotto de' seni degli angoli che fanno co' diametri due

corde menate dagli estremi del diametro $2a'$ è nella ragione costante di $-\frac{b'^2}{a'^2}$.

La condizione dell' incontro sull' ellisse di due corde menate dagl' estremi del diametro $2b'$

$$e' - \frac{a'^2}{b'^2},$$

com' è agevole il dimostrarlo.

191. L' inversa di queste verità è anche vera, come potrà dimostrarsi nello stesso modo, che si è fatto per gli assi [144].

192. Segue da ciò, che se vogliamo graficamente, data un' ellisse, menarvi due diametri conjugati sotto un angolo dato, non dobbiamo che menarci un diametro qualunque BB', (286), ed indi descritto su di BB' un segmento circolare capace del dato angolo, menare dal punto O, ove questo incontra il perimetro dell' ellisse le due corde BO, $B'O$, e condurre i diametri NN', AA' rispettivamente parallele a queste corde, saranno questi i diametri richiesti. Il problema analitico sarebbe *data l' equazione di un' ellisse rapporta a due diametri qualunque, rilevare l' equazione corrispondente a due diametri conjugati sotto un angolo dato*: ma noi l' abbiamo già sciolto (163).

193. Se si vuole, data un'ellisse, determinare graficamente gli assi, basterà menare primieramente un diametro qualunque EE', descrivere su di questo un semicerchio, e condotte le corde DE, EF ad un punto F, ove il semicerchio incontra il perimetro ellittico, menare i due diametri AA' BB' rispettivamente paralleli a quelle corde;

Fig. 23

Fig. 24

non essendovi che un sol sistema di diametri conjugati rettangolari (153, pag. 133), questi saranno gli assi. Questo stesso problema l'abbiamo altrove sciolto analiticamente (174).

194. L'equazioni

$$a^2+b^2=a'^2+b'^2 \quad . \; . \; . \; (1),$$
$$ab=a'b'\operatorname{sen}(a',b') \quad . \; . \; . \; (2)$$
(174)

$$a'^2=\frac{a^2b^2}{a^2\operatorname{sen}^2(x,x')+b^2\cos^2(x,x')} \quad . \; . \; (3),$$
$$b'^2=\frac{a^2b^2}{a^2\operatorname{sen}^2(x,y')+b^2\cos^2(x,y')} \quad . \; . \; . \; (4)$$
(172)

$$a^2\operatorname{sen}(x,x')\operatorname{sen}(x,y')+b^2\cos(x,x')\cos(x,y')=0 \ldots (5),$$

combinate convenevolmente possono fornirci le condizioni necessarie per la soluzione de' problemi, che hanno rapporto a' diametri conjugati dell' ellisse. E sulle prime supponiamo $a'=b'$, l'equazione (1) ci darà

$$a'=\pm\sqrt{\left[\frac{a^2+b^2}{2}\right]};$$

allora se col centro dell' ellisse, e col raggio

$$\sqrt{\left[\frac{a^2+b^2}{2}\right]},$$

si descriva un cerchio, i punti, ove questo incontrerà il perimetro ellittico segneranno i punti, pe' quali debbono passare i diametri conjugati eguali. L'equazione dell' ellisse in questa potesi diviene

$$x'^2+y'^2=a'^2=\frac{a^2+b^2}{2},$$

ossia

$$Cp^2+pP^2=\frac{a^2+b^2}{2};$$ Fig. 19

ma si ha

$$pP^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\text{(equaz. all'ellis.)};$$

dunque si avrà

$$x^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2=\frac{a^2+b^2}{2},$$

che ridotta da

$$(a^2-b^2)x^2=(a^2-b^2)\frac{a^2}{2};$$

da cui si tira

$$x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}},$$

ed è questa l'ascissa corrispondente all'origine de' diametri conjugati eguali: similmente rapportando le ordinate all'asse minore, si troverebbe per l'origine de' diametri conjugati eguali

$$y=\pm\frac{b}{\sqrt{2}}.$$

La prima espressione, essendo data solamente per a, e la seconda solamente per b, ne segue, che una medesima ascissa segna l'origine de' diametri conjugati eguali in tutte l'ellissi, che hanno lo stesso asse maggiore, o minore.

195. Essendo $a'=b'$, l'equazioni (3), e (4) ci daranno

$$a^2\text{sen}^2(x,x')+b^2\cos^2(x,x')=$$
$$a^2\text{sen}^2(x,y')+b^2\cos^2(x,y'),$$

da cui si tira

$$\text{tang}^2(x,x')+\frac{b^2}{a^2}=\text{tang}^2(x,y')+\frac{b^2}{a^2},$$

cioè

$$\text{tang}(x,x')=\text{tang}(x,y');$$

allora, mediante quest'equazione, riflettendo, che

$$\text{sen}(x,x''),\ \text{sen}(x,y'),$$

come pres' in parte opposta, danno per

$$\text{tang}(x,x')\text{tang}(x,y'),$$

una quantità negativa, l' equazione (5) ci darà

$$\text{tang}(x,x')=\text{tang}(x,y')=\pm\frac{b}{a},$$

e sarà questa l' espressione della tangente dell' angolo, che fanno coll' asse delle ascisse due diametri conjugati eguali: il doppio segno riguarda la posizione de' due diametri, cioè sarà

Fig. 19 $\text{tang}FCB=\frac{b}{a}$, e $\text{tang}QCB=-\frac{b}{a}$ (155).

Se si ha riguardo all' asse minore, si avrà

$$\text{tang}FCA=\frac{a}{b},\ \text{e}\ \text{tang}PCA=-\frac{a}{b},$$

giacchè allora l' equazione (5) essendo dalla forma

$$b^2\text{sen}(y,x')\text{sen}(y,y')+a^2\cos(y,x')\cos(y,y')=0$$

da $\quad \tan g(y,x') = \tan g(y,y') = \pm \frac{a}{b}$.

Ciò posto essendo

$$\tan g(x',y') = \frac{\tan g(x,x') - \tan g(x,y')}{1 + \tan g(x,x')\tan g(x,y')} \quad (37, 146),$$

sostituendo a vicenda i valori

$$\pm \frac{b}{a}, \text{ e } \pm \frac{a}{b}$$

in luogo di

$$\tan g(x,x'), \tan g(x,y') \text{(prec.)},$$

si avrà, riducendo

$$\tan g(x',y') = \pm \frac{2ab}{a^2 - b^2},$$

espressioni identiche a quelle del n.° (146), e che sono le tangenti degli angoli fatti rispettivamente agli estremi dell' asse maggiore, o minore dalle corde che ci si menano dagli estremi dell' asse minore, o maggiore.

196. Segue da ciò, che se si menano ad uno degli estremi A' dell' asse minore da' punti B, e B' le corde BA', $B'A'$, o le altre AB', $A'B'$ dagli estremi dell' asse minore ad uno degli estremi dell' asse maggiore, menando i diametri KF, PQ rispettivamente paralleli a quelle corde, saranno questi i diametri conjugati eguali (a). Fig. 19

g

a) Dunque o col centro dell' ellisse, e col raggio $\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)}$ si descriva un cerchio, e si prenda un ascissa eguale a $\pm \frac{a}{\sqrt{2}}$, e

197. Segue da ciò, che, siccome quelle corde comprendono il massimo angolo ottuso, o il minimo angolo acuto, di cui possono esser capaci due corde menate sul perimetro ellittico dagli estremi dell' asse maggiore, o minore (148), così l' angolo ottuso formato da due diametri conjugati eguali è il massimo di tutti quelli, di cui possono esser capaci due diametri conjugati qualunque; e l' angolo acuto fatto da' diametri conjugati eguali è il minimo di tutti gli angoli acuti fatti da tutti i diametri conjugati qualunque, quali angoli d' altronde sappiamo supplementi l' uno dell' altro (150,155). Ecco intanto come ciò si potrebbe dimostrare direttamente con un processo puramente analitico.

198. Abbiamo post'al di sopra (117) l' equazione dell' ellisse riguardo i diametri conjugati obbliqui sotto la forma

$$Q'y^2+P'x^2=M,$$

ed ivi tra Q', e P' abbiamo trovato le seguenti relazioni

$$P'+Q'=(A+C)\text{sen}^2(x',y')\,[\text{pag}\,(155)] \quad \ldots (\beta)$$

$$P'Q'=\left(AC-\frac{B^2}{4}\right)\text{sen}^2(x',y') \quad \ldots (v)$$

Con questi valori possiamo formare l' equazione di 2.° grado (algeb. 90 pag. 154)

$a+\frac{b}{\sqrt{2}}$, o si prattica la costruzione qui indicata; si avranno sempre graficamente i diametri conjugati eguali.

$$z^2-(A+C)\text{sen}^2(x',y')z+(AC-\frac{B^2}{4})\text{sen}^2(x',y')=0 \quad (k)$$

ove z simboleggia i valori di Q', e P', cioè de' diametri conjugati $2a'$, e $2b'$ (177). Le radici di questa equazione sono

$$z=\frac{(A+C)\text{sen}^2(x',y')}{2}\pm$$

$$\frac{\text{sen}(x',y')}{2}\sqrt{[(A+C)\text{sen}^2(x',y')-(4AC-B^2)]}$$

Finchè si ha

$$(A+C)\text{sen}^2(x',y')-(4AC-B^2)>0$$

i valori di z sono reali; divengono eguali, allorchè si ha

$$(A+C)\text{sen}^2(x',y')-(4AC-B^2)=0,$$

e poichè sono imaginarii, quando è (a)

$$(A+C)\text{sen}^2(x',y')-(4AC-B^2)<0,$$

ne segue, che il minimo valore di $\text{sen}(x',y')$ nasce dall' equazione

$$(A+C)\text{sen}^2(x',y')-(4AC-B^2)=0,$$

ossia nell' ipotesi, che i due diametri conjuga-

(a) E' chiaro, che questa condizione non può aver luogo, se non quando si ha $4AC-B^2>0$, ossia $B^2-4AC<0$; giacchè altrimenti la quantità $-(4AC-B^2)$ sarebbe positiva, e non vi sarebbe più luogo a caso immaginario. Questo caso dell' equazione generale, che nell' ipotesi di $B^2-4AC<0$ può divenire impossibile, è quello stesso, che per altra via abbiamo rilevato al di sopra. Bisogna riflettere, che l' equazione (k) ci può egualmente fornire le formole (pag. 156.).

ti sono eguali: quindi poichè nella sola supposizione de' diametri conjugati eguali la quantità sen(x',y') tocca il minimo valore, di cui è capace, ne segue, che avendo luogo questa sola supposizione, secondocchè l' espressione di tang(x',y') sarà negativa, o positiva, i diametri conjugati comprenderanno il massimo degli angoli ottusi, o il minimo degli acuti (not.a146), di cui possono due diametri conjugati esser capaci. Infatti, essendo nella medesima ipotesi

$$\text{tang}(x,y')=\text{tang}(x,x')=\frac{b}{a}\ (195),$$

se questo valore si sostituisca nell' equazione

$$\text{tang}(x',y')=\frac{\text{tang}(x,x')-\text{tang}(x,y')}{1+\text{tang}(x,x')\text{tang}(x,y')},$$

riflettendo, che se l' angolo (x,y') è acuto, l' altro (x,x') è ottuso, ed all' opposto (155), si avrà

$$\text{tang}(x',y')=\mp\frac{2ab}{a^2-b^2},$$

ch' è l'espressione della tangente del massimo o del minimo fatto da due corde (146, e 147), e quindi da due diametri conjugati eguali (giacchè vi è lo stesso rapporto tra le tangenti degli angoli di due diametri conjugati coll' asse delle ascisse, e quelle di due corde menate ad un punto qualunque del perimetro ellittico dagli estremi di uno degli assi [156]).

196. *Dati due diametri conjugati di una ellisse, e l' angolo, ch' essi fanno, determinare gli assi.*

Si sommino membro a membro l'equazioni

$$a^2+b^2=a'^2+b'^2 \quad \ldots \quad (m)$$

$$2ab=2a'b'\text{sen}(a',b') \quad \ldots \quad (n);$$

si avrà, estraendo la radice quadrata

$$a+b=\sqrt{[a'^2+b'^2+2a'b'\text{sen}(a',b')]} \quad (p);$$

indi dall'equazione (m) sottrattane l'altra (n), ed estraendo la radice quadrata, si avrà

$$a-b=\sqrt{[a'^2+b'^2-2a'b'\text{sen}(a',b')]} \quad \ldots \quad (q);$$

allora prendendo la somma dell' equazioni (p), e (q), si avrà

$$2a=\sqrt{[a'^2+b'^2+2a'b'\text{sen}(a',b')]}+$$
$$\sqrt{[a'^2+b'^2-2a'b'\text{sen}(a',b')]},$$

e prendendone la differenza, si avrà

$$2b=\sqrt{[a'^2+b'^2+2a'b'\text{sen}(a',b')]}-$$
$$\sqrt{[a'^2+b'^2-2a'b'\text{sen}(a',b')]},$$

e son queste l'espressioni degli assi, che sodisfano al problema.

197. Per costruire questi valori, siano CE', CE due semidiametri conjugati a', b'; dal punto E' si abbassi su di CE la perpendicolare $E'O$, e si tagli

$$E'D=E'F=CE:$$

allora essendo Fig. 30

$$E'O=a'\text{sen}(a',b'),$$

si avrà

$$CF=\sqrt{[a'^2+b'^2+2a'b'\text{sen}(a',b')]},$$

coll' altra

$$\text{sen}^2(x,y')+\cos^2(x,y')=1.$$

Le prime ci danno

$$\text{sen}(x,x')=\text{sen}\,E'CA=\frac{b}{a'}\sqrt{\left[\frac{a^2-a'^2}{a^2-b^2}\right]},$$

e se l' altre due ci danno

$$\text{sen}(x,y')=\text{sen}\,ECA=\frac{b}{b'}\sqrt{\left[\frac{a^2-b'^2}{a^2-b^2}\right]};$$

allora conoscendo con quest' equazioni l' angolo ACE', o l'angolo ACE, si renderà anche noto l' angolo $E'CH$, o ECK, come eguali rispettivamente a

$$D-ACE', \; D-ACE;$$

e resterà così determinata la posizione degli assi.

199. *Dati gli assi di una ellisse determinare due diametri conjugati a', b' che facciano un dato angolo (a',b').*

Per sciogliere questo problema, ch' è l'inverso dell'altro (196); bisogna combinare l'equazioni

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2$$

e

$$2a'b'=\frac{2ab}{\text{sen}(a',b')}:$$

sommandole membro a membro, ed estraendone la radice quadrata, si avrà

$$a'+b'=\sqrt{\left(a^2+b^2+\frac{2ab}{\text{sen}(a',b')}\right)} \ldots (p);$$

indi prendendone la differenza, ed estrattane

parimente la radice 2ª., si avrà

$$a'-b'=\sqrt{\left(a^2+b^2-\frac{2ab}{\text{sen}(a',b')}\right)} \ldots (q):$$

allora l' equazioni (p), e (q) ci daranno,

$$2a'=\sqrt{\left[a^2+b^2+\frac{2ab}{\text{sen}(a',b')}\right]}+$$

$$\sqrt{\left[a^2+b^2-\frac{2ab}{\text{sen}(a',b')}\right]}$$

$$2b'=\sqrt{\left[a^2+b^2+\frac{2ab}{\text{sen}(a',b')}\right]}-$$

$$\sqrt{\left[a^2+b^2-\frac{2ab}{\text{sen}(a',b')}\right]};$$

espressioni che possono agevolmente costruirsi.

Questo stesso problema si è sciolto al di sopra (160,163) più conforme all'indole de'metodi moderni, rapportando cioè l' ellisse degli assi a' diametri conjugati sotto il dato angolo, ed indi determinando il valore di questi.

200. Bisogna riflettere, che l' espressione

$$\text{sen}E'CA=\frac{b}{a'}\sqrt{\left[\frac{a^2-a'^2}{a^2-b^2}\right]},$$

e l' altra

$$\text{sen}ECA=\frac{b}{a'}\sqrt{\left(\frac{a^2-b'^2}{a^2-b^2}\right)}(198),$$

nell' ipotesi in cui ci sono dati gli assi di quantità, e di sito, e ci sono dati di grandezza i diametri conjugati ci danno rispettivamente la posizione di questi, e quindi risolvono il *pro-*

blema di determinare la posizione di due diametri conjugati dati di grandezza rispetto agli assi dati di quantità, e di sito.

201. Andiamo ora ad indicare il modo, come quadrare uno spazio ellittico. A tal effetto poicchè l'equazione del cerchio

$$y^2=a^2-x^2,$$

diviene quella dell' ellisse, allorchè il 2°. membro si moltiplica pe'l rapporto costante $\frac{b^2}{a^2}$, ne segue che trovando l' espressione di uno spazio circolare, si avrà quello dell'ellisse corrispondente, moltiplicando quello per $\frac{b^2}{a^2}$. Quindi si de- Fig. 55 scriva sull' asse maggiore AA' di una ellisse il cui centro è C, un semicerchio ARB', e, menate le ordinate

$$xy, xz; x'y', x'z'; x''y'', x''z'' \text{ ec.},$$

si menino le rette $x'z''$, Cz''' ... ; si avrà superf.

$$Cx'''z'''=x'''z''' . \frac{Cx'''}{2} \text{(geom. 97)};$$

e superf. sett $CRz'''=\text{arc} R.z''' . \frac{1}{2} CR$ (geom. 277),

e quindi

$$\text{superf. } CRz'''x'''=x'''Cz'''+CRz'''.$$

Or essendo

$$x'''z'''=\sqrt{(a^2-x^2)}=(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}};$$

sarà

$$\text{triang } Cx'''z'''=\frac{Cx'''}{2}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{x}{2}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}};$$

e sviluppando in serie la quantità in $(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, e moltiplicando ciascun termine per $\frac{x}{2}$, la superficie del detto triangolo verrà espresso dalla serie

$$\frac{ax}{2}-\frac{x^3}{4a}-\frac{x^5}{16a^3}-ec \ . \ . \ . (M).$$

Dippiù l' arco Rz''' espresso in funzione del suo seno che quì è Cx''', ossia x, è (trigonom. 43)

$$\text{arc}Rz'''=x+\frac{x^3}{2.3a^2}+\frac{3x^5}{2.4.5a^4}+\frac{3.5x^7}{2.4.6\,7a^6} \ldots (N):$$

se i termini di questa serie si moltiplichino per $\frac{a}{2}$, ossia per la metà del raggio, si avrà

$$\text{sett.}RCz'''\frac{ax}{2}+\frac{x^3}{4.3.a}+\frac{3x^5}{4 \ . \ 4 \ . \ 5a^3}+ec.\ (P)$$

Ciò fatto i termini della serie (M) si riducono ad avere i stessi denominatori de' corrispondenti termini della serie (P), essa diverrà

$$\text{triang.}\ Cx'''z'''=\frac{ax}{2}-\frac{3x^3}{4.3.a}-\frac{5x^5}{4.4.5a^3}-e \ldots (M')$$

Si sommino ora le serie (P'), ed (M'), e si avrà

$$\text{superf.}\ CRz'''x'''=ax-\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}-ec \ldots (Q)$$

Quindi si avrà

$$COHx'''=\frac{b}{a}\left(ax-\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}-ec\right).$$

Ne siegue da ciò, che si avrà

$$COHx''' : RCx''z''' = \frac{b}{a} : 1 = b : a = 2b : 2a.$$

Cioè l'aja di una ellisse è a quella del cerchio descritto sull'asse maggiore come l'asse minore è all'asse maggiore.

202. Quindi poichè il cerchio, il cui raggio è a, ha per aja πa^2, indicando con π il rapporto del raggio alla semicirconferenza (Geom. 273 pag. 166), sarà

$$2a : 2b = \pi a^2 : \pi ab,$$

e la superficie di una ellisse, i cui assi sono $2a$, $2b$, sarà πab; allora se tra a, b si ritrovi una media proporzionale m, sarà

$$m^2 = ab, \text{ e } \pi ab = \pi m^2;$$

ma πm^2 è la superficie del cerchio descritto col raggio m: sicchè *la superficie di una ellisse è eguale a quella di un cerchio descritto con un raggio medio proporzionale tra i due semiassi dell'ellisse.*

203. Sia S la superficie di una ellisse, i cui assi sono $2a$, $2b$; e S' la superficie di un'altra ellisse, che ha per assi $2a'$, $2b'$; si avrà

$$S = \pi ab, \text{ ed } S' = \pi a'b',$$

e quindi

$$S : S' :: ab : a'b';$$

dal che ne segue, *che le superficie di due ellissi sono tra loro come i rettangoli de' loro assi.*

204. Con un calcolo del tutto simile può dimo-

strarsi che la *superficie di una ellisse è a quella del cerchio descritto sull' asse minore di essa come l' asse maggiore dell' ellisse è al minore.*

Allora l' aja del cerchio essendo πb^2, si avrà

$$b : a = \pi b^2 : \pi ab,$$

dal che se ne tira, come quì sopra, che l' aja di una ellisse è eguale a quella del cerchio descritto con un raggio medio proporzionale tra' suoi semiassi; e che due ellisse tra loro come i rettangoli de' loro assi.

CAPO VIII.

Iperbole.

205. Si è osservato nella discussione dell' equazione generale (166), che l'equazione dell'iperbole non differiva da quella dell' ellisse, se non che nell'iperbole uno degli assi è imaginario, laddove nell' ellisse ambidue sono reali : quindi si è rilevato che l' equazione dell' iperbole prendea la forma

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2\pm a^2),$$

nella quale il segno + posto avanti a^2 nella parentesi si rapporta all' asse $2b$ reale, e 'l segno − dinota che l' asse reale è $2a$ (64).

206. Chiameremo primario l' asse $2a$, e secondario l' altro $2b$.

207. Egli è chiaro da ciò ; che modificate le proprietà dell' ellisse, secondo questo passaggio di uno de' suoi assi ad imaginario, si hanno le corrispondenti proprietà dell' Iperbole. La n^a. analisi si limiterà sopra una sola di quest' equazioni, *p. e* ; su di

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

giacchè l' altra

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2+a^2),$$

ordinata rispetto ad x diviene

$$x^2=\frac{a^2}{b^2}(y^2-b^2),$$

ch' è della stessa forma della prima, e che per conseguenza ne porta alle stesse proprietà.

208. E sulle prime poichè l' equazione

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

riguarda l' origine delle coordinate presa al centro della curva, se l' origine si trasporti al vertice B', e si chiami x' l' ascissa al vertice $B'P$ essendo

Fig. 4

$$OP=B'P-B'O,$$

ossia

$$x=x'-a,$$

e quindi

$$x^2=x'^2-2ax'+a^2,$$

sostituendo questo valore di x^2 nell' equazione

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

si avrà

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x'^2-2ax'),$$

ch' è quella appunto in cui si sarebbe cambiata l' equazione dell' ellisse

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax'-x'^2),$$

sostituendo $-b^2$ alla quantità b^2. Tanto l' equazione

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

quando l' altra

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x'^2 - 2ax'),$$

posto sotto la forma di proporzione ci danno

$$PA^2 : B'P.BP = b^2 : a^2, NR^2 : B'N.BN = b^2 : a^2 \ldots (1),$$

da cui si tira

$$PA^2 : NB^2 = B'P.BP : B'N.BN \ldots (2).$$

La prima di queste due analogie ci dimostra, che *il quadrato di una semiordinata all' asse primario è al rettangolo delle ascisse d'amb' i vertici come il quadrato dell' asse secondario è a quello dello stesso asse primario*; e la seconda ci fa vedere *che i quadrati delle semiordinate all' asse primario sono fra loro come i rettangoli delle ascisse d' amb' i vertici*; proprietà che abbiamo anche rimarcate nell' ellisse (115, e 116).

209. Le stesse verità si otterrebbero per le ordinate all' asse $2b$, maneggiando l' equazione

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(y^2 - b^2),$$

e l' altra

$$x^2 = \frac{a^2}{a^2}(y'^2 - 2by).$$

210. Se gli assi $2a$, $2b$ si suppongano eguali tra loro, l' equazione dell' iperbole diverrà

$$y^2 = x^2 - a^2 \text{ o } x^2 = y^2 - b^2,$$

L' iperbole, cui si riferisce l'equazione

$$y^2=x^2-a^2\ ,$$

o l'altra

$$x^2=y^2-b^2$$

si chiama iperbole *parilatera.*

Sia z l' ordinata di una Iperbole *parilatera* si avrà

$$z^2=x^2-a^2\ :$$

questo valore si sostituisca nell' equazione

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)\ ,$$

e questa diverrà

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}z^2\ ,$$

ossia

$$y=\frac{b}{a}z\ ,$$

da cui si tira

$$y\ :\ z=b\ :\ a\ ;$$

cioè che *le ordinate di un' Iperbole qualunque sono alle ordinate corrispondenti di un' Iperbole parilatera, che ha con essa* **lo stesso asse reale** *2a, come l' asse 2b è all' asse 2a* (a).

211. Similmente potrà dimostrarsi *che le ordinate di una iperbole qualunque sono alle corrispondenti ordinate di una Iperbole parilatera, che ha con essa lo stesso asse reale* **2b**,

(a) Medesimo rapporto delle ordinate all' ellisse, a quella del cerchio descritto sull' asse maggiore (115).

come l' asse 2a è all' asse 2b (b).

212. Quindi ne segue che le ordinate di un Iperbole qualunque sono le stesse ordinate di una iperbole parilatera rapportata all' asse reale $2a$, o $2b$ e diminuite, o allungate in ragione dell' asse $2a : 2b$, o dell' asse $2b : 2a$.

213. Dunque, generalmente parlando, l' iperbole perilatera è ad un' iperbole qualunque come il cerchio all' ellisse.

214. Abbiamo osservato nell' ellisse che l' espressione della sua eccentricità è

$$\sqrt{(a^2-b^2)} :$$

cambiamo b^2 in $-b^2$, e l' eccentricità dell' iperbole sarà

$$\sqrt{(a^2+b^2)},$$

quantità sempre reale. Dunque nell' iperbole vi sono ancora due punti presi sull' asse delle ascisse corrispondenti a' fuochi dell' Ellisse. Questi punti si chiamano ancora *fuochi* dell' Iperbole, e sono distanti dal centro per la quantità

$$\sqrt{(a^2+b^2)},$$

la quale chiamasi parimente *eccentricità*.

215. Segue da ciò, ch' elevando al punto B una perpendicolare $BI=b$, congiunta CI, se col centro C, e col raggio CI descriviamo un cerchio, i due punti F, F', ove questo scgherà l' asse BB' prolungato, saranno i fuochi dell' Iperbole. Fig. 26

216. Se l'iperbole si rapportasse all'asse $2b$, l'

(b) Identico rapporto delle ordinate all' ellisse a quelle del cerchio descritto sull' asse minore (115).

asse $2a$ sarebbe imaginario, e l' espressione

$$\sqrt{(b^2-a^2)},$$

che nell' ellisse è sempre imaginaria, posto in essa $-a^2$ in luogo di a^2 per avere la corrispondente espressione dell' iperbole (66), diverrà egualmente

$$\sqrt{(a^2+b^2)},$$

cosicchè all' asse $2b$ reale vi corrisponderà la stessa eccentricità, che all' asse $2a$.

217. Vediamo ora qual è l' ordinata corrispondente all' ascissa costante

$$\sqrt{(a^2+b^2)}:$$

a tal effetto si sostituisca nell' equazione

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

La quantità a^2+b^2
in luogo di x^2, si avrà

$$y^2=\frac{b^4}{a^2},$$

donde si tira

$$y=\frac{b^2}{a},$$

e

$$2y=\frac{4b^2}{2a}:$$

la grandezza $\frac{4b^2}{2a}$ si chiama *parametro*; indicandolo col simbolo p, si avrà

$$2a : 2b=2b : p;$$

e ne conchiuderemo, come per l' ellisse (123

generalmente (125), che *il parametro* dell' asse $2a$ è terza proporzionale in ordine a se stesso, ed al suo conjugato $2b$. Allora, chiamando e l' eccentricità, si avrà

$$e^2=a^2+b^2=a^2+\frac{ab^2}{a}=a\left(a+\frac{p}{2}\right);$$

da cui se ne tira, che *l' eccentricità dell' iperbole presa sull' asse $2a$, è media proporzionale tra lo stesso semiasse a, e la somma di esso col semiparametro.*

218. Se nell' equazione

$$x^2=\frac{a^2}{b^2}(y^2-b^2),$$

si sostituisca ad y^2 la quantità a^2+b^2, è chiaro che il parametro dell' asse $2b$ sarà $\frac{2a^2}{b}$, ossia terzo proporzionale in ordine a $2b$, e $2a$, come nell' ellisse; allora si avrà

$$e^2=a^2+b^2=b\frac{a^2}{b}+b^2=b\left(\frac{p}{2}+b\right),$$

cioè *l' eccentricità dell' asse $2b$ reale sarà media proporzionale tra il semiasse b, e la somma di esso col corrispondente semiparametro* (a).

219. Se vogliamo rapportare l' equazione dell'

(a) Nell'ellisse l'eccentricità è media proporzionale tra il semiasse maggiore e la sua differenza del semiparametro, e siccome sull'asse minore non ci sono fuochi, nè per conseguenza eccentricità, questa proprietà non ha luogo per l'asse minore.

iperbole al parametro, bisogna riflettere, che essendo

$$\frac{p}{2}=\frac{2b^2}{a},$$

o a $\frac{2a^2}{b}$, secondochè la curva si rapporta all'asse $2a$, o all'altro $2b$ sarà nel primo caso

$$\frac{p}{2a}=\frac{b^2}{a^2},$$

e nel secondo

$$\frac{p}{2b}=\frac{a^2}{b^2};$$

sostituendo questi valori nelle rispettive equazioni dell'iperbole, si avrà

$$y^2=\frac{p}{2a}(x^2-a^2),$$

ed

$$y^2=\frac{p}{2a}(x'^2-2ax'),$$

$$x^2=\frac{p}{2b}(y^2-b^2),$$

$$x^2=\frac{p}{2b}(y'^2-2by'),$$

equazioni, che poste sotto la forma di proporzione, ci dimostrano, che nell'iperbole *il quadrato di una semiordinata è al rettangolo del-*

l' ascisse d' amb' i vertici come il parametro al diametro (a).

220. Meniamo da' fuochi ad un punto qualunque del perimetro iperbolico i raggi vettori FP, $F'P$; chiamando CO, x, OP, y; poichè al punto F' si ha (55) Fig. 26

$$m=\sqrt{(a^2+b^2)},$$

ed $n=0$; ed al punto

$$P,\ m'=x,\ n'=y,$$

(riflettendo, che l' eccentricità CF' si prende in parti opposta alla coordinate x, ed y), si avrà

$$F'P^2=[\sqrt{(a^2+b^2)}+x]^2+y^2 \ (\text{m}),$$

$$=[\sqrt{(a^2+b^2)}+x]^2+\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2=$$

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2+2x\sqrt{(a^2+b^2)}+a^2 \ldots (K);$$

e quindi, estraendo la radice seconda, sarà

$$F'P=x\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{a}+a \ . \ . \ . \ (1):$$

in simil modo, poichè al punto F si ha

$$m=\sqrt{(a^2+b^2)},$$

ed $n=0$, ed al punto P, $m'=x$, ed $n'=y$, sarà

$$FP^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2-2x\sqrt{(a^2+b^2)}+a^2 \ . \ (K),$$

ed

(a) La stessa verità ha luogo nell' ellisse (125).

$$FP = x\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{a} - a \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

allora, prendendo la differenza di queste due espressioni, si avrà

$$F'P - FP = 2a.$$

Cioè *nell' iperbole la differenza di due raggi vettori menati da' fuochi presi sull' asse 2a ad un punto qualunque del perimetro iperbolico è costante, ed eguale propriamente all' asse 2a* (a).

221. Lo stesso si dimostrarebbe, se uno de' raggi divenisse ordinata come FQ, sostituendo cioè in luogo di FQ il valore del semiparametro, ed in luogo di FF'' la doppia eccentricità.

La medesima verità ha luogo per l' asse $2b$, com' è agevole il rilevare.

222. Finora abbiamo veduto, che se da' fuochi di una Iperbole si menino ad un punto qualunque del suo perimetro due raggi vettori, la differenza di questi è eguale all' asse reale: vediamo, se l' inversa è ancor vera, cioè *data quella curva, che ha la proprietà di avere costante la differenza di due raggi vettori menati da uno stesso punto del suo perimetro a due punti presi nell' asse di essa a distanze eguali dal centro; si domanda la sua equazione, e con ciò la sua natura.*

Fig. 26 Siano F, F' i due punti presi a distanze eguali dal centro C sull' asse prolungato

(a) Nell' ellisse la somma di due raggi vettori si è dimostrata eguale all' asse maggiore (132).

BB' : si chiamino e le rette CF, CF' costanti, ed i raggi vettori $F'P$, FP si chiamino z', z : l' asse BB' si chiami $2a$; si avrà per le condizioni del problema

$$z'-z=2a \ldots (3):$$

dal punto P si meni una semiordinata PQ, che si chiami y; sostituendo nell'equazioni (K), (prec.) e in luogo di

$$\sqrt{(a^2+b^2)},$$

e z', z in luogo di $F'P$, FP, si avrà

$$z'^2=e^2+2ex+x^2+y^2 \ldots (4),$$

e

$$z^2=e^2-2ex+x^2+y^2 \ldots (5):$$

prendendo la somma, e la differenza di (4), e (5) si avrà

$$z'^2+z^2=2(e^2+x^2+y^2) \ldots (6)$$

$$(z'+z)(z'-z)=4ex \ldots (7):$$

sostituendo in (7) il valore di $z'-z$, che si ha da (3) si ha

$$z'+z=\frac{2ex}{a} \ldots (8):$$

allora l' equazioni (3), e (8) ci daranno

$$z'=\frac{ex}{a}+a \ldots (9),$$

$$z=\frac{ex}{a}-a \ldots (10);$$

ed elevando a quadrato, si avrà

$$z'^2=\frac{e^2x^2}{a^2}+2ex+a^2,$$

$$z^2=\frac{e^2x^2}{a^2}-2ex+a^2,$$

e quindi

$$z'^2+z^2=\frac{2e^2x^2}{a^2}+2a^2:$$

paragonata questa equazione coll' altra (6) ci da

$$\frac{e^2x^2}{a^2}+a^2=e^2+x^2+y^2,$$

d' onde si tira

$$a^2y^2+(a^2-e)x^2=a^2(a^2-e^2);$$

ma si ha

$$e^2=a^2+b^2,$$

e quindi

$$a^2-e^2=-b^2;$$

dunque sostituendo questo valore di a^2-e^2 nell' ultima equazione, essa diverrà

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2,$$

da cui si tira

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

ch' è l' equazione dell' iperbole: quindi la curva, che si domanda è l' iperbole.

223. Dunque l' iperbole è il luogo geometrico degl' infiniti punti, i quali hanno tali distanze da due punti fissi, che la loro differenza è costante.

224. Quindi l' equazioni

$$z'=\frac{ex}{a}+a \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$z=\frac{ex}{a}-a \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

esprimendo una proprietà caratteristica dell'iperbole, benchè mentiscono la forma dell' equazione alla linea retta; pure appartengono all' iperbole, giacchè, come abbiamo riflettuto per l' ellisse, le coordinate variabili x, z non si rapportano a due assi fissi; ma una è il raggio vettore, che varia a ciascun punto della curva, e l' altra è l' ascissa corrispondente. Diamo alle due variabili x; z la medesima origine F, F'; quindi chiamiamo

$$FO, x', F'O, x'',$$ Fig. 26

si avrà

$$x=e-x', x=x''-e,$$

e l' equazioni (5), e (6) diverranno rispettivamente con questa sostituzione

$$z'=\frac{a^2-e^2+ex''}{a}=\frac{ex''-b^2}{a} \quad . \quad . \quad . \quad (n),$$

$$z=\frac{e^2-a^2-ex'}{a}=\frac{b^2-ex'}{a} \quad . \quad . \quad (m),$$

allora essendo polari le coordinate x'', z'; x', z che partono da uno stesso punto F', F, si sostituisca in (n) per x'', l' espressione

$$z'\cos(z',x''),$$

essa diverrà

$$z'=\frac{ez'\cos(z',x'')-b^2}{a},$$

da cui si tira

$$z'=\frac{b^2}{e\cos(z',x'')-a}\quad\ldots\;(p).$$

Similmente se nell' equazione (m) si faccia

$$x'=z\cos(x',z),$$

si avrà

$$z=\frac{b^2-ez\cos(z,x')}{a},$$

da cui si tira

$$z=\frac{b^2}{a+e\cos(z,x')}\ldots(q);$$

L' equazioni (p), e (q) sono l' equazioni polari dell' iperbole. La prima si rapporta al polo F'', e l' altra al polo F.

225. Segue da tutto ciò, che noi possiamo definire l' iperbole *una curva che ha quattro rami infiniti, e che ha ad egual distanza dal centro due punti presi sull' asse che l' incontra, tali, che menati da questi ad un punto del suo perimetro due raggi vettori, la loro differenza è eguale all' asse medesimo.*

226. Quindi possiamo descrivere agevolmente un' iperbole per assegnazione di punti nel seguente modo; cioè, presi sul prolungamento di una retta BB' due punti F, F' equidistanti dal punto C metà di BB', si descriva col centro F, e con un raggio R a piacere, ma non minore di BF un cerchio; indi, preso F' per centro, e per raggio una retta

Fig. 26

$$R'=R+B'B$$

si descriva un altro cerchio; i punti, ove queste circonferenze si segano, apparterranno ad una iperbole, il cui asse reale è BB', e l'eccentricità CF': infatti questi punti soddisfano alla condizione

$$R'=R+B'B,$$

da cui si tira

$$R'-R=B'B,$$

equazione caratteristica dell' iperbole.

227. Se l'iperbole si vuole descrivere con moto organico; allora, presa una riga $F'P$ maggiore di FF', si adatti ad uno de' fuochi F' in modo che possa girare circolarmente, indi si applichi all' altro fuoco F una corda flessibile

$$FTP=F'P-B'B,$$

la quale si fissi con un estremo nel punto F, e coll' altro nel punto P: ciò fatto si faccia girare la riga circolarmente intorno al punto F' sullo stesso piano $FF'P$, tenendo ben tesa la corda FTP con un chiodetto T; questo traccerà dopo tal movimento un' iperbole. Infatti essendo

$$FTP'=F'P-B'B,$$

togliendo TF di comune, sarà

$$TF=F'T-B'B,$$

da cui si tira

$$F'T-FT=B'B,$$

ch' è l' equazione caratteristica dell' iperbole.

228. Adattiamo il parametro al punto B perpendicolarmente a $B'B$, come BD, e pe' punti B', D estremi dell' asse, e del parametro si faccia passare la retta $B'D$. Si chiami Fig. 27

$BO, x', IO, y, B'B, 2a, BD, p.$

Si rapporti la retta $B'D$ al sistema delle coordinate BF, BD, di cui l' origine sia B; poichè al punto B' si ha $n=0$, ed $m=2a$, ed al punto D, $n'=-p$, ed $m'=0$, l' equazione della retta $B'D$ simboleggiata generalmente, da

$$y-n=\frac{n-n'}{m-m'}(x-m)(32, \text{e } 141),$$

colla sostituzione de' valori di m, n; m', n', diverrà

$$y=\frac{p}{2a}(x'-2a).$$

Si prolunghi l' ordinata OI' dell' iperbole, finchè incontra in un punto R, la retta $B'D$ prolungata, sarà OR un' ordinat' a questa retta, e quindi si avrà

$$OR=\frac{p}{2a}(x'-2a),$$

ed

$$OR.B'O=\frac{p}{2a}(x'^2-2ax')=OI'^2 (219):$$

dunque chiamando *regolatrice* la retta $B'D$, ne conchiuderemo, come per l' ellisse, che nell' iperbole *il quadrato di ogni semiordinata è eguale al rettangolo dell' ascissa al vertice corrispondente nella stessa semiordinata prolungata fino alla regolatrice.*

229. Quindi, essendo $OR>BD$, il quadrato di una semiordinata dell'iperbole sarà maggiore del rettangolo dell'ascissa corrispondente nel parametrio, ed è perciò, che a questa curva si è da-

to il nome d' iperbole dalla voce greca ὑπερβάλλειν excedere.

230. Si meni da uno degli estremi B dell' asse $2a$ una retta BQ; poicchè al punto B si ha $y=0$, ed $x=a$, l' equazione di BQ sarà

Fig. 28

$$y=A(x-a):$$

similmente l' equazione della retta $B'Q$, che passa pel punto B', ove si ha $y=0$, ed $x=-a$, è $y=A'(x+a)$: moltiplichiamo membro a membro queste due equazioni, si avrà

$$y^2=AA'(x^2-a^2).$$

Se ora sopponiamo che le due corde BQ, $B'Q$ vadansi ad unire sul perimetro della curva, le coordinate x, y apparterranno all' iperbole, e l' equazione

$$y^2=AA'(x^2-a^2)$$

si rapporterà parimente all' iperbole: allora confrontando questa equazione coll' altra

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

si avrà

$$AA'=\frac{b^2}{a^2},$$

e sarà questa la condizione, perchè due rette menate dagli estremi dell' asse $2a$ vadansi ad unire sull' iperbole; e quindi l' equazioni di queste rette saranno rispettivamente

$$y=\frac{b^2}{A'a^2}(x-a)\ .\ .\ .\ (1);$$

$$y = \frac{b^2}{Aa^2}(x+a) \quad . \; . \; . \; (1).$$

Se all' opposto supponiamo, come si è fatto nell' ellisse, che tra le tangenti A, A' degli angoli, che fanno due rette coll' asse delle ascisse vi sia la relazione

$$AA' = \frac{b^2}{a^2},$$

moltiplicando membro a membro l' equazioni (1), e (2) di queste rette, e sostituendo $\frac{b^2}{a^2}$ per AA', si avrà per risultato

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

la quale essendo l' equazione dell' iperbole, ne conchiuderemo, che la condizione

$$AA' = \frac{b^2}{a^2},$$

appartiene a due rette, le quali si vanno ad unire sopra un' iperbole, i cui assi sono

$$2a,\ 2b\sqrt{-1}.$$

231. Nello stesso modo potrà dimostrarsi, che la condizione, perchè s' incontrino sull' iperbole due corde menate dagli estremi dell' asse $2b$ è

$$AA' = \frac{a^2}{b^2},$$

e che all' opposto se tra le tangenti degli ango-

li che due rette fanno coll' asse dell' ascisse vi è la relazione

$$AA'=\frac{a^2}{b^2},$$

queste rette vanno ad unirsi su di una iperbole rapportata agli assi $2b$, e $2a\sqrt{-1}$.

232. Dunque, come nell'ellisse (145), potremo conchiudere, ch' è costante il prodotto delle tangenti trigonometriche degli angoli, che fanno co' rispettivi assi due corde menate da' loro estremi ad un punto qualunque del perimetro iperbolico.

233. Allorchè l' iperbole è equilatera, si avrà

$$AA'=1:$$

ciò indica, che la somma degli angoli Fig. 3

$$QB'P,\ QBP,$$

è eguale ad un retto; ma poicchè l' angolo QBB', supplemento dell' angolo QBP, è ottuso, l' angolo BQB' non sarà retto. Ma andiamo a dimostrar coll' analisi la natura dell' angolo compreso da due corde menate ad un punto di un iperbole qualunque.

234. Operando come nell'ellisse (146), si avrà

$$\text{tang}BQB'=\frac{2ay}{y^2+x^2-a^2}=\frac{2a^2b}{(a^2+b^2)\sqrt{(x^2-a^2)}},$$

la quale secondocchè si ha

$$x<a;\ x=a;\ x>a,$$

ci dimostra nel 1°. caso, che l' angolo $B'QB$ non può aver luogo; nel 2°. che diviene retto; e nel 3°., che diviene sempre più acuto, a proporzione, che x aumenta (trig. 14).

235. Cioè non v'è angolo alcuno per un' ascissa minore di CB; infatti in tal caso non v' è curva (65); al punto B l' angolo delle corde diviene retto, e sarà acuto l' angolo che fanno due corde ad un altro punto qualunque della curva.

236. Le stesse conseguenze hanno luogo, allorchè le ascisse vengono prese sull' asse $2b$. In tal caso l' espressione della tangente dell' angolo di due corde menate ad uno stesso punto della curva sarà

$$\frac{2ab^2}{(a^2+b^2)\sqrt{(y^2-b^2)}},$$

come può agevolmente osservarsi con un' analisi del tutto simile a quella praticata qui sopra per l' asse $2a$.

Allorchè l' iperbole è parilatera, si avrà

$$\text{tang}BQR = \frac{a^3}{a^2\sqrt{(x^2-a^2)}} = \frac{a}{\sqrt{(x^2-a^2)}};$$

si faccia

$$x = a\sqrt{2};$$

sarà

$$\text{tang}BQB' = 1,$$

o l' angolo BQR sarà la metà di un retto (trig. 17). Cioè *nell' iperbole parilatera l' angolo formato da due corde condotto ad un punto delle curve corrispondente all' ascissa* $a\sqrt{2}$, *è la metà di un retto.*

CAPO IX.

Iperbole rapportata a' diametri conjugati obbliqui.

257. Per esaminare le proprietà dell' iperbole riguardo a due diametri conjugati obbliqui, bisogna primieramente, data la sua equazione tra le coordinate rettangolari, trasformarla tra le coordinate obblique per mezzo delle note formole

$$x=\cos(x,x')x'+\cos(x,y')y'$$
$$y=\text{sen}(x,x')x'+\text{sen}(x,y')y'. \quad (60.\text{III})$$

Fatta la sostituzione di questi valori di x, ed y nell' equazione

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

ordinando si avrà

$$[a^2\text{sen}^2(x,y')-b^2\cos^2(x,y')]y'^2+$$
$$[a^2\text{sen}^2(x,x')-b^2\cos^2(x,x')]x'^2+$$
$$2[a^2\text{sen}(x,x')\text{sen}(x,y')-b^2\cos(x,x')\cos(x,y')]x'y'=$$
$$-a^2b^2 \ldots (1).$$

Per ridurre questa equazione a contenere i quadrati delle sole variabili x', y', ossia per farsi che i nuovi diametri obbliqui siano conjugati (57), fa d'uopo che abbia luogo l'equazione

$$a^2\text{sen}(x,x')\text{sen}(x,y')-b^2\cos(x,x')\cos(x,y')=0:$$

noi la chiamaremo perciò *equazione di condizione*; ed allora l' equazione (1) diverrà

$$[a^2\text{sen}^2(x,x')-b^2\cos^2(x,y')]y'^2+$$
$$[a^2\text{sen}^2(x,x')-b^2\cos^2(x,x')]x'^2=-a^2b^2 \quad . \quad . \quad (2).$$

238. Rifletteremo in questo luogo, come nell' ellisse (152) di non aver adoprate le formole per una nuova origine sul motivo che la trasformazione si è fatta sull' equazione dell' iperbole rapportata al centro origine comune di tutt' i diametri.

239. L'equazione di condizione posta sotto la forma

$$a^2\text{tang}(x,x')\text{tang}(x,y')-b^2=0,$$

ci dimostra, che può esser soddisfatta per qualunque valore diamo

a $\text{tang}(x,x')$, o

a $\text{tang}(x,y')$,

e poichè assumendo a piacere uno di questi angoli, l' altro ha sempre un valore reale, ne segue che nell' iperbole egualmente che nell' ellisse (153); *i sistemi de' diametri obbliqui conjugati sono infiniti.*

240. Egli è agevole il ravvisare, che il sistema degli assi è un caso particolare de' diametri conjugati obbliqui. Infatti l' equazione di condizione resta soddisfatta facendo

$$\text{sen}(x,x')=0,$$
$$\cos(x,y')=0:$$

in tal caso l' angolo (x,x') diviene zero, e l' asse delle x' si distenderà su quello delle x, e l' altro (x,y') diviene retto, con che l' asse delle y' si distenderà su quello delle y.

241. Supponiamo noto l' angolo (x,x'): allora l'

equazione di condizione posta sotto la forma

$$\tan g(x,y')=\frac{b^2}{a^2}\text{cotang}(x,x'),$$

ci renderà noto egualmente l' angolo (x,y') ; e resterà perciò sciolto il seguente interessantissimo problema. *Dato un diametro qualunque, ritrovare la posizione del suo conjugato.* [Lo stesso per l' ellisse (154)].

Seguitiamo ad occuparci delle conseguenze, alle quali ci conduce l' equazione di condizione : essa si metta sotto la forma

$$\tan g(x,x')\tan g(x,y')=\frac{b^2}{a^2};$$

e poicchè tra le tangenti degli angoli A,A', che fanno coll' asse delle ascisse due corde menate ad un punto qualunque del perimetro iperbolico dagli estremi dell' asse $2a$, vi è anche la relazione

$$AA'=\frac{b^2}{a^2},$$

ne segue, che sarà

$$\tan g(x,x')\tan g(x,y')=AA':$$

allora se supponiamo

$$A=\tan g(x,x'),$$

sarà ancora

$$A'=\tan g(x,y');$$

dal che ne segue che se noi meniamo dagli estremi dell' asse $2a$ due corde a qualunque punto del perimetro iperbolico, i diametri che si

$$FP = x\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{a} - a \;.\;.\;.\;(2),$$

allora, prendendo la differenza di queste due espressioni, si avrà

$$F'P - FP = 2a.$$

Cioè *nell' iperbole la differenza di due raggi vettori menati da' fuochi presi sull'asse $2a$ ad un punto qualunque del perimetro iperbolico è costante, ed eguale propriamente all' asse $2a$* (a).

221. Lo stesso si dimostrarebbe, se uno de' raggi divenisse ordinata come FQ, sostituendo cioè in luogo di FQ il valore del semiparametro, ed in luogo di FF' la doppia eccentricità.

La medesima verità ha luogo per l' asse $2b$, com' è agevole il rilevare.

222. Finora abbiamo veduto, che se da' fuochi di una Iperbole si menino ad un punto qualunque del suo perimetro due raggi vettori, la differenza di questi è eguale all' asse reale: vediamo, se l' inversa è ancor vera, cioè *data quella curva, che ha la proprietà di avere costante la differenza di due raggi vettori menati da uno stesso punto del suo perimetro a due punti presi nell' asse di essa a distanza eguali dal centro; si domanda la sua equazione, e con ciò la sua natura.*

Fig. 26 Siano F, F' i due punti presi a distanze eguali dal centro C sull' asse prolungato

---

(a) Nell' ellisse la somma di due raggi vettori si è dimostrata eguale all' asse maggiore (131).

BB' : si chiamino e le rette CF, CF' costanti, ed i raggi vettori $F'P$, FP si chiamino z', z : l' asse BB' si chiami $2a$; si avrà per le condizioni del problema

$$z'-z=2a \quad . \quad . \quad . \quad (3):$$

dal punto P si meni una semiordinata PQ, che si chiami y; sostituendo nell'equazioni (K), (prec.) e in luogo di

$$\sqrt{(a^2+b^2)},$$

e z', z in luogo di $F'P$, FP, si avrà

$$z'^2=e^2+2ex+x^2+y^2 \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

e
$$z^2=e^2-2ex+x^2+y^2 \quad ... \quad (5);$$

prendendo la somma, e la differenza di (4), e (5) si avrà

$$z'^2+z^2=2(e^2+x^2+y^2) \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$(z'+z)(z'-z)=4ex \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7):$$

sostituendo in (7) il valore di $z'-z$, che si ha da (3) si ha

$$z'+z=\frac{2ex}{a} \quad . \quad . \quad . \quad (8):$$

allora l' equazioni (3), e (8) ci daranno

$$z'=\frac{ex}{a}+a \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

$$z=\frac{ex}{a}-a \quad . \quad . \quad . \quad (10);$$

ed elevando a quadrato, si avrà

$$z'^2=\frac{e^2x^2}{a^2}+2ex+a^2,$$

$$z^2=\frac{e^2x^2}{a^2}-2ex+a^2,$$

e quindi

$$z'^2+z^2=\frac{2e^2x^2}{a^2}+2a^2:$$

paragonata questa equazione coll' altra (6) ci da

$$\frac{e^2x^2}{a^2}+a^2=e^2+x^2+y^2;$$

d' onde si tira

$$a^2y^2+(a^2-e)x^2=a^2(a^2-e^2);$$

ma si ha

$$e^2=a^2+b^2,$$

e quindi

$$a^2-e^2=-b^2;$$

dunque sostituendo questo valore di a^2-e^2 nell' ultima equazione, essa diverrà

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2,$$

da cui si tira

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

ch' è l' equazione dell' iperbole: quindi la curva, che si domanda è l' iperbole.

223. Dunque l' iperbole è il luogo geometrico degl' infiniti punti, i quali hanno tali distanze da due punti fissi, che la loro differenza è costante.

224. Quindi l' equazioni

$$z'=\frac{ex}{a}+a \ . \ . \ . \ (9),$$

$$z=\frac{ex}{a}-a \ . \ . \ . \ (10),$$

esprimendo una proprietà caratteristica dell'iperbole, benchè mentiscono la forma dell' equazione alla linea retta; pure appartengono all' iperbole, giacchè, come abbiamo riflettuto per l' ellisse, le coordinate variabili x, z non si rapportano a due assi fissi; ma una è il raggio vettore, che varia a ciascun punto della curva, e l' altra è l' ascissa corrispondente. Diamo alle due variabili x, z la medesima origine F, F'; quindi chiamiamo

$$FO, \ x', \ F'O, \ x'',$$ Fig. 26

si avrà

$$x=e-x', \ x=x''-e,$$

e l' equazioni (5), e (6) diverranno rispettivamente con questa sostituzione

$$z'=\frac{a^2-e^2+ex''}{a}=\frac{ex''-b^2}{a} \ . \ . \ . \ (n),$$

$$z=\frac{e^2-a^2-ex'}{a}=\frac{b^2-ex'}{a} \ . \ . \ (m),$$

allora essendo polari le coordinate x'', z'; x', z che partono da uno stesso punto F', F, si sostituisca in (n) per x'', l' espressione

$$z'\cos(z',x''),$$

essa diverrà

$$z' = \frac{ez'\cos(z'.x'') - b^2}{a},$$

da cui si tira

$$z' = \frac{b^2}{e\cos(z',x'') - a} \quad \ldots (p).$$

Similmente se nell' equazione (m) si faccia

$$x' = z\cos(x',z),$$

si avrà

$$z = \frac{b^2 - ez\cos(z,x')}{a},$$

da cui si tira

$$z = \frac{b^2}{a + e\cos(z,x')} \ldots (q);$$

L' equazioni (p), e (q) sono l' equazioni polari dell' iperbole. La prima si rapporta al polo F', e l' altra al polo F.

225. Segue da tutto ciò, che noi possiamo definire l' iperbole *una curva che ha quattro rami infiniti, e che ha ad egual distanza dal centro due punti presi sull' asse che l' incontra, tali, che menati da questi ad un punto del suo perimetro due raggi vettori, la loro differenza è eguale all' asse medesimo.*

226. Quindi possiamo descrivere agevolmente un'iperbole per assegnazione di punti nel seguente modo; cioè, presi sul prolungamento di una retta BB' due punti F, F' equidistanti dal punto C metà di BB', si descriva col centro F, e con un raggio R a piacere, ma non minore di BF un cerchio; indi, preso F' per centro, e per raggio una retta

Fig. 26

$$R' = R + B'B$$

si descriva un altro cerchio; i punti, ove queste circonferenze si segano, apparterranno ad una iperbole, il cui asse reale è BB', e l' eccentricità CF': infatti questi punti soddisfano alla condizione

$$R'=R+B'B\ ,$$

da cui si tira

$$R'-R=B'B\ ,$$

equazione caratteristica dell' iperbole.

227. Se l'iperbole si vuole descrivere con moto organico; allora, presa una riga $F'P$ maggiore di FF', si adatti ad uno de' fuochi F' in modo che possa girare circolarmente, indi si applichi all' altro fuoco F una corda flessibile

$$FTP=F'P-B'B\ ,$$

la quale si fissi con un estremo nel punto F, e coll' altro nel punto P: ciò fatto si faccia girare la riga circolarmente intorno al punto F' sullo stesso piano $FF'P$, tenendo ben tesa la corda FTP con un chiodetto T; questo traccerà dopo tal movimento un' iperbole. Infatti essendo

$$FTP'=F'P-B'B\ ,$$

togliendo TF di comune, sarà

$$TF=F'T-B'B\ ,$$

da cui si tira

$$F'T-FT=B'B\ ,$$

ch' è l' equazione caratteristica dell' iperbole.

228. Adattiamo il parametro al punto B perpendicolarmente a $B'B$, come BD, e pe' punti B', D estremi dell' asse, e del parametro si faccia passare la retta $B'D$. Si chiami Fig. 27

$BO, x', IO, y, B'B, 2a, BD, p.$

Si rapporti la retta $B'D$ al sistema delle coordinate BF, BD, di cui l' origine sia B, poicchè al punto B' si ha $n=0$, ed $m=2a$, ed al punto D, $n'=-p$, ed $m'=0$, l' equazione della retta $B'D$ simboleggiata generalmente, da

$$y-n=\frac{n-n'}{m-m'}(x-m)(32, e\ 141),$$

co'la sostituzione de' valori di $m, n; m', n'$, diverrà

$$y=\frac{p}{2a}(x'-2a).$$

Si prolunghi l' ordinata OI' dell' iperbole, finchè incontra in un punto R, la retta $B'D$ prolungata, sarà OR un' ordinat' a questa retta, e quindi si avrà

$$OR=\frac{p}{2a}(x'-2a),$$

ed

$$OR.B'O=\frac{p}{2a}(x'^2-2ax')=OI'^2 (219):$$

dunque chiamando *regolatrice* la retta $B'D$, ne conchiuderemo, come per l' ellisse, che nell' iperbole *il quadrato di ogni semiordinata è eguale al rettangolo dell' ascissa al vertice corrispondente nella stessa semiordinata prolungata fino alla regolatrice.*

229. Quindi, essendo $OR>BD$, il quadrato di una semiordinata dell'iperbole sarà maggiore del rettangolo dell'ascissa corrispondente nel parametrio, ed è perciò, che a questa curva si è da-

to il nome d' iperbole dalla voce greca ὑπερβάλλειν *excedere.*

230. Si meni da uno degli estremi B dell' asse $2a$ una retta BQ; poichè al punto B si ha $y=0$, ed $x=a$, l' equazione di BQ sarà

Fig. 28

$$y=A(x-a):$$

similmente l' equazione della retta $B'Q$, che passa pel punto B', ove si ha $y=0$, ed $x=-a$, è $y=A'(x+a)$:

moltiplichiamo membro a membro queste due equazioni, si avrà

$$y^2=AA'(x'^2-a^2).$$

Se ora sopponiamo che le due corde BQ, $B'Q$ vadansi ad unire sul perimetro della curva, le coordinate x, y apparterranno all' iperbole, e l' equazione

$$y^2=AA'(x^2-a^2)$$

si rapporterà parimente all' iperbole: allora confrontando questa equazione coll' altra

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

si avrà

$$AA'=\frac{b^2}{a^2},$$

e sarà questa la condizione, perchè due rette menate dagli estremi dell' asse $2a$ vadansi ad unire sull' iperbole; e quindi l' equazioni di queste rette saranno rispettivamente

$$y=\frac{b^2}{A'a^2}(x-a)\ .\ .\ .\ (1);$$

li che due rette fanno coll' asse dell' ascisse vi è la relazione

$$AA'=\frac{a^2}{b^2},$$

queste rette vanno ad unirsi su di una iperbole rapportata agli assi $2b$, e $2a\sqrt{-1}$.

232. Dunque, come nell'ellisse (145), potremo conchiudere, ch' è costante il prodotto delle tangenti trigonometriche degli angoli, che fanno co' rispettivi assi due corde menate da' loro estremi ad un punto qualunque del perimetro iperbolico.

233. Allorchè l' iperbole è equilatera, si avrà

$$AA'=1:$$

ciò indica, che la somma degli angoli Fig. 3

$$QB'P, QBP,$$

è eguale ad un retto; ma poicchè l' angolo QBB', supplemento dell' angolo QBP, è ottuso, l' angolo BQB' non sarà retto. Ma andiamo a dimostrar coll' analisi la natura dell' angolo compreso da due corde menate ad un punto di un iperbole qualunque.

234. Operando come nell'ellisse (146), si avrà

$$\tang BQB'=\frac{2ay}{y^2+x^2-a^2}=\frac{2a^2b}{(a^2+b^2)\sqrt{(x^2-a^2)}}$$

la quale secondocchè si ha

$$x<a\,;\ x=a\,;\ x>a\,,$$

ci dimostra nel 1°. caso, che l' angolo $B'QB$ non può aver luogo; nel 2°. che diviene retto; e nel 3°., che diviene sempre più acuto, a proporzione, che x aumenta (trig. 14).

235. Cioè non v'è angolo alcuno per un' ascissa minore di CB; infatti in tal caso non v' è curva (65); al punto B l' angolo delle corde diviene retto, e sarà acuto l' angolo che fanno due corde ad un altro punto qualunque della curva.

236. Le stesse conseguenze hanno luogo, allorchè le ascisse vengono prese sull' asse $2b$. In tal caso l' espressione della tangente dell' angolo di due corde menate ad uno stesso punto della curva sarà

$$\frac{2ab^2}{(a^2+b^2)\sqrt{(y^2-b^2)}},$$

come può agevolmente osservarsi con un' analisi del tutto simile a quella praticata qui sopra per l' asse $2a$.

Allorchè l' iperbole è parilatera, si avrà

$$\text{tang}BQR' = \frac{a^3}{a^2\sqrt{(x^2-a^2)}} = \frac{a}{\sqrt{(x^2-a^2)}};$$

si faccia

$$x = a\sqrt{2};$$

sarà

$$\text{tang}BQB' = 1,$$

e l' angolo BQR sarà la metà di un retto (trig. 17). Cioè *nell' iperbole parilatera l' angolo formato da due corde condotto ad un punto delle curve corrispondente all' ascissa* $a\sqrt{2}$, *è la metà di un retto.*

CAPO IX.

Iperbole rapportata a' diametri conjugati obbliqui.

237. Per esaminare le proprietà dell'iperbole riguardo a due diametri conjugati obbliqui, bisogna primieramente, data la sua equazione tra le coordinate rettangolari, trasformarla tra le coordinate obblique per mezzo delle note formole

$$x=\cos(x,x')x'+\cos(x,y')y'$$
$$y=\text{sen}(x,x')x'+\text{sen}(x,y')y' \qquad (60.\text{III})$$

Fatta la sostituzione di questi valori di x, ed y nell'equazione

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

ordinando si avrà

$$[a^2\text{sen}^2(x,y')-b^2\cos^2(x,y')]y'^2+$$
$$[a^2\text{sen}^2(x,x')-b^2\cos^2(x,x')]x'^2+$$
$$2[a^2\text{sen}(x,x')\text{sen}(x,y')-b^2\cos(x,x')\cos(x,y')]x'y'=$$
$$-a^2b^2 \ldots (1).$$

Per ridurre questa equazione a contenere i quadrati delle sole variabili x', y', ossia per farsi che i nuovi diametri obbliqui siano conjugati (57), fa d'uopo che abbia luogo l'equazione

$$a^2\text{sen}(x,x')\text{sen}(x,y')-b^2\cos(x,x')\cos(x,y')=0:$$

noi la chiamaremo perciò *equazione di condizione*; ed allora l'equazione (1) diverrà

$$[a^2\text{sen}^2(x,x')-b^2\cos^2(x,y')]y'^2+$$
$$[a^2\text{sen}^2(x,x')-b^2\cos^2(x,x')]x'^2=-a^2b^2 \ldots (2).$$

238. Rifletteremo in questo luogo, come nell' ellisse (152) di non aver adoprate le formole per una nuova origine sul motivo che la trasformazione si è fatta sull' equazione dell' iperbole rapportata al centro origine comune di tutti i diametri.

239. L'equazione di condizione posta sotto la forma

$$a^2\text{tang}(x,x')\text{tang}(x,y')-b^2=0,$$

ci dimostra, che può esser soddisfatta per qualunque valore diamo

$$\text{a} \quad \text{tang}(x,x'), \text{ o}$$
$$\text{a} \quad \text{tang}(x,y'),$$

e poichè assumendo a piacere uno di questi angoli, l' altro ha sempre un valore reale, ne segue che nell' iperbole egualmente che nell' ellisse (153); *i sistemi de' diametri obbliqui conjugati sono infiniti.*

240. Egli è agevole il ravvisare, che il sistema degli assi è un caso particolare de' diametri conjugati obbliqui. Infatti l' equazione di condizione resta soddisfatta facendo

$$\text{sen}(x,x')=0,$$
$$\cos(x,y')=0:$$

in tal caso l' angolo (x,x') diviene zero, e l' asse delle x' si distenderà su quello delle x, e l' altro (x,y') diviene retto, con che l' asse delle y' si distenderà su quello delle y.

241. Supponiamo noto l' angolo (x,x'); allora l'

equazione di condizione posta sotto la forma

$$\tang(x,y')=\frac{b^2}{a^2}\cotang(x,x'),$$

ci renderà noto egualmente l' angolo (x,y'); e resterà perciò sciolto il seguente interessantissimo problema. *Dato un diametro qualunque, ritrovare la posizione del suo conjugato.* [Lo stesso per l' ellisse (154)].

Seguitiamo ad occuparci delle conseguenze, alle quali ci conduce l' equazione di condizione: essa si metta sotto la forma

$$\tang(x,x')\tang(x,y')=\frac{b^2}{a^2};$$

e poicchè tra le tangenti degli angoli A, A', che fanno coll' asse delle ascisse due corde menate ad un punto qualunque del perimetro iperbolico dagli estremi dell' asse $2a$, vi è anche la relazione

$$AA'=\frac{b^2}{a^2},$$

ne segue, che sarà

$$\tang(x,x')\tang(x,y')=AA':$$

allora se supponiamo

$$A=\tang(x,x'),$$

sarà ancora

$$A'=\tang(x,y');$$

dal che ne segue che se noi meniamo dagli estremi dell' asse $2a$ due corde a qualunque punto del perimetro iperbolico, i diametri che si

menano paralleli rispettivamente a queste corde saranno due diametri conjugati.

242. Lo stesso ha luogo, allorchè l'iperbole è rapportata all' asse $2b$. Nello stesso modo si sono determinati nell' ellisse due diametri conjugati (156).

243. Quindi se, conosciuti gli assi, vogliamo nell' iperbole menare due diametri conjugati, che fanno un angolo dato, non si dee, che descrivere sull'asse reale un segmento di cerchio capace del dato angolo, menare degli estremi dell' asse ad uno de' punti, ove questo segmento incontra il perimetro della curva, due corde, ed indi condurre due diametri paralleli a queste corde: saranno quest'i diametri conjugati richiesti. In fatti, chiamando φ, θ rispettivamente gli angoli delle corde coll' asse delle ascisse $2a$, si avrà

$$\text{tang}\varphi\,\text{tang}\theta = \frac{b^2}{a^2}(\quad [illegible] \quad);$$

ma si ha, pe 'l parallelismo delle corde e de' diametri,

$$\text{ang}(x,x') = \varphi,$$

ed

$$\text{ang}(x,y') = \theta;$$

dunque, sarà parimente

$$\text{tang}(x,x')\,\text{tang}(x,y') = \frac{b^2}{a^2},$$

da cui si tira

$$a^2\text{sen}(x,x')\,\text{sen}(x,y') - b^2\cos(x,x')\cos(x,y') = 0,$$

h' è l' equazione di condizione. La stessa costruzione per l'ellisse (157).

244. Poicchè due corde menate ad un punto qualunque del perimetro iperbolico dagli estremi dell' asse reale, sono sempre capaci di un angolo non maggiore del retto (235), ne segue, che se si dimandono due diametri conjugati CH', CK, che comprendono un dato angolo ottuso, basta descrivere sull' asse reale un segmento circolare capace dell' angolo acuto supplemento del dato angolo ottuso, ed indi menare due diametri rispettivamente paralleli alle corde condotte dagli estremi dell' asse ad uno de' punti, ove il segmento descritto taglia la curva. Quindi è sempre possibile nell' iperbole il problema di menare due diametri conjugati sotto un dato angolo qualunque, il che non lo è per l' ellisse (161). Fig. 29.

245. Il problema precedente si potrà egualmente, che nell' ellisse (not. a pag. 140) scogliere analiticamente, chiamando θ l' angolo dato, si avrà, eliminando y tra l' equazione dell' iperbole, e quella del cerchio,

$$x=\pm a\frac{\sqrt{[(\text{tang}^2\theta(a^2+b^2)^2+4a^2b^2)]}}{\text{tang}\theta(a^2+b^2)},$$

espressione, che non può divenire imaginaria, e che dimostra in conseguenza la possibilità di questo problema, come si è riflettuto qui sopra.

246. La stessa verità si sarebbe rilevata, sciogliendo un tal problema col metodo del n°. 160; cioè, chiamando ψ l' angolo dato, si avrà

$$\text{tang}(x,x')=\frac{(a^2+b^2)\psi\pm\sqrt{(\psi^2(a^2+b^2)^2+4a^2b^2)}}{2a^2},$$

e $\tang(x,y')=-\frac{(a^2+b^2)\downarrow\pm\sqrt{(\downarrow^2(a^2+b^2)^2+4a^2b^2)}}{2a^2}$;

ed indicando questi valori con μ', λ', si avrà

$$\operatorname{sen}(x,x')=\frac{\tang(x,x')}{\sqrt{[1+\tang^2(x,x')]}}=\frac{\mu'}{\sqrt{(1+\mu'^2)}},$$

e $$\cos(x,x')=\frac{1}{\sqrt{[1+\tang^2(x,x')]}}=\frac{1}{\sqrt{(1+\mu'^2)}},$$

e per la stessa ragione

$$\operatorname{sen}(x,y')=\frac{\lambda'}{\sqrt{(1+\lambda'^2)}},$$

e $$\cos(x,y')=\frac{1}{\sqrt{(1+\lambda'^2)}},$$

cosicchè, sostituiti questi valori nell' equazione (2, 225), la risultante

$$\frac{a^2\lambda'^2-b^2}{1+\lambda'^2}y^2+\frac{a^2\mu'^2-b^2}{1+\mu'^2}x^2=-a^2b^2,$$

esprimerà l' equazione dell' iperbole rapportata a due diametri conjugati sotto l' angolo dato $\downarrow$.

247. Ciocchè si è detto, (n°. 163... 169), nell' elisse, ha egualmente luogo nell' iperbole. Cioè trovat' i valori delle coordinate a', b' (52); e determinate le quantità

$\operatorname{sen}(x,x')$, $\operatorname{sen}(x,y')$; $\cos(x,x')$, $\cos(x,y')$

dietro le due condizioni 1ª di eliminare il termine affetto da xy, e 2ª di rapportare la curva di una data equazione generale tra coefficienti numerici a due diametri conjugati sotto un da-

to angolo; se questi valori si sostituiscano nelle formole

$$x=x'\cos(x,x')+y'\cos(x,y')+a,$$

$$y=x'\mathrm{sen}(x,x')+y'\mathrm{sen}(x,y')+b,$$

si avrà nella trasformata l'equazione alla stessa curva tra' diametri conjugati inclinati sotto il dato angolo (166).

248. Così se l'iperbole dell'equazione

$$y^2-2xy-x^2-y+x+1=0,$$

si voglia rapportare a' suoi assi, la trasformata sarà (supprimendo gli apici)

$$y^2-x^2+\frac{3}{4\sqrt{2}}=0.$$

249. Facciamo nell'equazione (2) $y'=0$; si avrà

$$x'=\pm\sqrt{\left[\frac{-a^2b^2}{a^2\mathrm{sen}^2(x,x')-b^2\cos^2(x,x')}\right]},$$

e se si fa nella medesima equazione (2) $x'=0$, si avrà

$$y'=\pm\sqrt{\left[\frac{-a^2b^2}{a^2\mathrm{sen}^2(x,y')-b^2\cos^2(x,y')}\right]}:$$

dunque *i diametri conjugati sono divisi per metà al centro*.

250. Questi valori di x', ed y' si presentano sotto una forma imaginaria; ed essi in realtà lo sono, finchè il denominatore di quell'espressioni è una quantità positiva, ossia finchè si ha

$$a^2\mathrm{sen}^2(x,x')>b^2\cos^2(x,x'),$$

ed

$$a^2\mathrm{sen}^2(x,y')>b^2\cos^2(x,y').$$

Vediamo se queste condizioni possono aver luogo nel tempo stesso. Supponiamo perciò che sia

$$a^2\text{sen}^2(x,y')>b^2\cos^2(x,y')\ ;$$

si avrà, dividendo per

$$b^2\text{sen}^2(x,y')\ ,$$

ed estraendo la radice,

$$\frac{a}{b}>\frac{\cos(x,y')}{\text{sen}(x,y')}\ :$$

or dall' equazione di condizione si ha

$$\frac{\cos(x,y')}{\text{sen}(x,y')}=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{\text{sen}(x,x')}{\cos(x,x')}\ ;$$

dunque sarà ancora

$$\frac{a}{b}>\frac{a^2\text{sen}(x,x')}{b^2\cos(x,x')}\ ,$$

da cui si tira

$$\frac{a}{b}<\frac{\cos(x,x')}{\text{sen}(x,x')}\ ,$$

la quale dà

$$a\text{sen}(x,x')<b\cos(x,x')\ ,$$

e quindi

$$a^2\text{sen}^2(x,x')<b^2\cos^2(x,x')\ :$$

allora la quantità

$$a^2\text{sen}^2(x,x')-b^2\cos^2(x,x')\ ,$$

è negativa, e quindi l' espressione

$$\sqrt{\left[\frac{-a^2b^2}{a^2\text{sen}^2(x,x')-b^2\cos^2(x,x')}\right]}$$

diventa reale; dal che ne segue, che posto uno de' diametri conjugati imaginario, l' altro è reale, il che è analogo a ciocchè si è osservato per gli assi.

251. Facciasi dunque

$$\sqrt{\left[\frac{-a^2b^2}{a^2\text{sen}^2(x,x')-b^2\cos^2(x,x')}\right]}=a,$$

e
$$\sqrt{\left[\frac{-a^2b^2}{a^2\text{sen}^2(x,y')-b^2\cos^2(x,y')}\right]}=b\sqrt{-1};$$

sia HH' il diametro delle y', e KK' quello delle x'; si avrà Fig. 19

$$a'^2=CK^2=\frac{-a^2b^2}{a^2\text{sen}^2(x,x')-b^2\cos^2(x,x')},$$

e
$$-b'^2=CH^2=\frac{-a^2b^2}{a^2\text{sen}^2(x,y')-b^2\cos^2(x,y')}.$$

Ciò fatto ambidue i membri dell' equazione (2) si dividono pe'l prodotto de' coefficienti di y'^2, ed x'^2; moltiplicando la risultante per $-a^2b^2$, si avrà

$$\frac{-a^2b^2}{a^2\text{sen}^2(x,x')-b^2\cos^2(x,x')}y'^2-$$
$$\frac{a^2b^2}{a^2\text{sen}^2(x,y')-b^2\cos^2(x,y')}x'^2=$$
$$\frac{(-a^2b^2)(-a^2b^2)}{[a^2\text{sen}^2(x,x')-b^2\cos^2(x,x')][a^2\text{sen}^2(x,y')-b^2\cos^2(x,y')]},$$

ove riflettendo che il coefficiente di

$$y'^2 \text{ è } =a'^2,$$

e quello di

$$x'^2 \text{ è } -b'^2,$$

e la quantità costante

$$\text{è } -a'^2b'^2 ,$$

sostituendo si avrà

$$a'^2y'^2-b'^2x'^2=-a'^2b'^2 \quad . \; . \; . \; (E) ,$$

ossia

$$y'^2=\frac{b'^2}{a'^2}(x'^2-a'^2) ,$$

ch' è della stessa forma di quella rapportata agli assi.

252. L' equazione

$$a'^2=\frac{-a^2b^2}{a^2\text{sen}^2(x',x)-b^2\cos^2(x',x)} ,$$

si riduca coll' equazione

$$\text{sen}^2(x',x)=1-\cos^2(x',x) ,$$

si avrà

$$a'^2=\frac{-a^2b^2}{-(b^2+a^2)\cos^2(x',x)+a^2} \quad . \; . \; . \; (1) .$$

In questo fratto al massimo valore del denominatore vi corrisponderà il minimo valore del rotto; quindi facendo,

$$\cos(x',x)=1 ,$$

(essendo 1 il massimo valore di sen(x,x'), e di cos(x',x) [trig. pag. 213.]), l' equazione (1) si trasformerà in $a'^2=a^2$. Similmente se l' equazione

$$b'^2=\frac{a^2b^2}{a^2\text{sen}^2(x,y')-b^2\cos^2(x,y')} ,$$

si riduca mercè la condizione

$$\cos^2(x,y')=1-\text{sen}^2(x,y') ,$$

si avrà

$$b'^2=\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)\text{sen}^2(x,y')-b^2} ,$$

in cui facendo

$$\text{sen}(x,y')=1 ,$$

si avrà $b'^2=b^2$.

Da cui ne conchiuderemo, *che di tutt' i diametri, che si possono menare sulle due iperboli opposte, l' asse corrispondente ne sarà il minimo* (a).

253. Si trasformi l' equazione

$$a'^2y^2-b'x^2=-a^2b^2$$

mercè le formole

$$x'=\frac{x\text{sen}(y',x)-y\cos(y',x)}{\text{sen}(x',y')} ,$$

ed

$$y'=\frac{y\cos(x',x)-x\text{sen}(x',x)}{\text{sen}(x',y')} ,$$

per rapportarla di nuovo agli assi rettangolari, come si è fatto per l' ellisse (174); riducendo si avrà

$$\left.\begin{array}{c}[a'^2\cos^2(x',x)-b^2\cos^2(y',x)]y^2+\\ [a'^2\text{sen}^2(x',x)-b'^2\text{sen}^2(y',x)]x^2-\\ 2[(a'^2\text{sen}(x',x)\cos(x',x)-b'^2\text{sen}(y',x)\cos(y',x)]xy=\\ -a'^2b'^2\text{sen}^2(x',y')\end{array}\right\}(\alpha).$$

(a) Nell' ellisse si è dimostrato che l' asse $2a$ era il massimo, e l' altro $2b$ il minimo di tutt' i diametri (173).

Questa equazione dovendo essere identica all' altra

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$$

come appartenenti amendue all' iperbole rapportata agli assi, si avrà

$$a^2=a'^2\cos^2(x',x)-b'^2\cos^2(y',x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$-b^2=a'^2\text{sen}^2(x',x)-b'^2\text{sen}^2(y',x). \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$-a^2b^2=-a'^2b'^2\text{sen}^2(x',y') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$a'^2\text{sen}(x',x)\cos(x',x)-b'^2\text{sen}(y',x)\cos(y',x)=0 \quad . \quad (5)$$

l' equazioni (2), e (3) sommate, e ridotte mercè la condizione

$$\text{sen}^2(x,x')+\cos^2(x,x')=1, \ \text{sen}^2(x,y')+\cos^2(x,y')=1,$$

danno

$$a^2-b^2=a'^2-b'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

cioè *nell' iperbole la differenza de' quadrati degli assi è eguale a quella de' quadrati di due diametri conjugati* (a).

254. Similmente l' equazione (4) ci da

$$ab=a'b'\text{sen}(x',y'),$$

e quindi

$$4ab=4a'b'\text{sen}(x',y') \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

equazione, la quale ci dice (trigon. 67), che *nell' iperbole il rettangolo degli assi è eguale*

(a) Questo è chiaro, giacchè avendo dimostrato nell' ellisse $a^2+b^2=a'^2+b'^2$ (174), sostituendo a b^2, e b'^2 la quantità $-b^2$, e $-b'^2$ proprietà, che caratterizza l' iperbole riguardo all' ellisse, si avrà $a^2-b^2=a'^2-b'^2$.

al parallelogrammo fatto sopra due diametri conjugati (b).

255. Se $2a''$, e $2b''$ sono due altri diametri conjugati, si avrà parimente

$$a^2-b^2=a''^2-b''^2,$$

e quindi

$$a'^2-b'^2=a''^2-b''^2,$$

cioè *nell' iperbole la differenza di due diametri conjugati qualunque è costante, e propriamente eguale alla differenza de' quadrati degli assi.*

256. Per la stessa ragione, l' equazione (7) dandoci

$$4a'b'\,\text{sen}(a',b')=4a''b''\,\text{sen}(a'',b''),$$

ci fa conchiudere che *sono tutti eguali i parallelogrammi* $STS'T'$ *iscritti ne' rami delle iperboli opposte, e conjugate.* Fig. 23

257. Se noi supponiamo eguali due diametri conjugati $2a'$, $2b'$, allora l' equazione (6) ci darà $a^2-b^2=0$, e quindi $a=b$; sicchè la supposizione de' diametri conjugati eguali ci porta all' eguaglianza degli assi, e quindi all' iperbole parilatera; dunque *la sola iperbole parilatera ha la proprietà di avere eguali tutt' i diametri conjugati.*

258. Se ora vogliamo determinare l'angolo che fanno coll' asse delle ascisse due diametri conjugati eguali, bisogna riflettere che l' equazione di condizione

---

(b) La stessa proprietà si è dimostrata nell' ellisse (175).

$$a^2\text{sen}(x',x)\text{sen}(y',x)-b^2\cos(x',x)\cos(y',x)=0\ ,$$

diviene in questo caso

$$\text{sen}(x',x)\text{sen}(y',x)-\cos(x',x)\cos(y',x)=0\ ,$$

la quale da

$$\text{tang}(x',x)=\frac{1}{\text{tang}(y',x)}=\cot(y',x)(\text{trig.}11.\text{pag.}11.);$$

e l'angolo (x',x) sarà per conseguenza complemento dell' altro (y',x) (trig.8). Cioè *nell' iperbole parilatera l' angolo che due diametri conjugati eguali fanno coll' asse delle ascisse sono complementi l' uno dell' altro.*

259. Questa proprietà, che si osserva ne' diametri conjugati eguali dell' iperbole parilatera, ci porta ad una costruzione semplicissima, per mezzo della quale possiamo nell' iperbole parilatera, dato un diametro, trovare il suo conjugato. Infatti sia parilatera l'iperbole (fig.29); se CK è un semidiametro, essendo l' angolo ACK complemento dell' altro KCB, resterà determinata la posizione del semidiametro CH conjugato a CK, inclinando al punto C della retta BC una retta CH, che faccia l' angolo

$$BCH=ACK.$$

Poicch' è l' angolo

$$ACK=BCH\ ,$$

sarà

$$ACK-HCK=BCK-HCK\ ,$$

cioè

$$ACH=BCK\ ,$$

dal che ne segue, che nell' iperbole parilatera i diametri conjugati eguali fanno rispettivamen-

te angoli eguali cogli assi, dal che ne segue che possiamo agevolmente menare due diametri conjugati nell' iperbole parilatera, adattando due semidiametri CK, CH, che facciano rispettivamente angoli eguali co' semiassi CB, CA.

260.Se noi facciamo

$$a'^2 = Q', -b'^2 = -P',$$

e

$$-a'^2 b'^2 = \mp M,$$

l' equazione dell' iperbole tra' diametri conjugati (249[E]) acquisterà la forma

$$Q'y^2 - P'x'^2 = \mp M;$$

ed allora colla stess' analisi (n.° 177., e 178.) si determinerà, come nell' ellisse

$$\left.\begin{aligned} P' &= \tfrac{1}{2}\Big[(A+C)\operatorname{sen}^2(x',y') + \\ &\operatorname{sen}(x',y')\sqrt{\left[(A+C)^2\operatorname{sen}^2(x',y') - 4\left(AC - \frac{B^2}{4}\right)\right]}\Big] \\ Q' &= \tfrac{1}{2}\Big[(A+C)\operatorname{sen}^2(x',y') - \\ &\operatorname{sen}(x',y')\sqrt{\left[(A+C)^2\operatorname{sen}^2(x',y') - 4\left(AC - \frac{B^2}{4}\right)\right]}\Big] \end{aligned}\right\}\ldots(\varphi)$$

L' equazione dell' iperbole rapportata a' diametri conjugati sotto l' angolo dato sarà

$$\left.\begin{array}{c}\left[\left(\frac{A+C}{2}\right)\text{sen}^2(x',y')-\right.\\ \left.\text{sen}(x',y')\sqrt{(A+C)^2\text{sen}^2(x',y')-4\left(AC-\frac{B^2}{4}\right)}\right]y^2\\ +\left[\frac{(A+C)}{2}\text{sen}^2(x',y')+\right.\\ \left.\text{sen}(x',y')\sqrt{(A+C)^2\text{sen}^2(x',y')-4\left(BC-\frac{B^2}{4}\right)}\right]x^2\end{array}\right\}\ldots(\varphi')$$

e si avrà parimente

$$\left.\begin{array}{c}2a'=\mp\\ 2\sqrt{\left[\frac{-(C.D^2-E.B.D+A.E^2-F(B^2-4AC))}{(B^2-4AC)\left[\frac{(A+C)}{2}\text{sen}^2(x',y')\pm\text{sen}(x',y')\sqrt{\left((A+C)^2\text{sen}^2(x',y')-4\left(AC-\frac{B}{4}\right)\right)}\right]}\right]}\\ 2b'=\mp\\ 2\sqrt{\left[\frac{-(C.D^2-E.B.D+A.E^2-F(B^2-4AC))}{(B^2-4AC)\left[\frac{(A\mp C)}{2}\text{sen}^2(x',y')-\text{sen}(x',y')\sqrt{\left((A+C)^2\text{sen}^2(x',y')-4\left(AC-\frac{B^2}{4}\right)\right)}\right]}\right]}\end{array}\right\}(\varphi'')$$

Egli è chiaro, che i valori di P, e Q pag. 69, e l'equazioni (m'), (S), (T) pag. 87, e 88 rientrono rispettivamente nelle altre (φ), (φ'), (φ''), allorchè si suppone

$$\text{sen}(x',y')=1,$$

ossia, allorchè si suppongono rettangolari i diametri conjugati. Quindi quelle non formano, che un caso particolare di queste.

204. Dunque tutte le proprietà dell' iperbole, che riguardano gli assi, e che non dipendono dall' inclinazione de' diametri, convengono pa-

rimente a' diametri conjugati. E sulle prime, contando le ascisse dal vertice si ha

$$x'=x''-a',$$

con che l'equazione

$$y'^2=\frac{b'^2}{a'^2}(x'^2-a'^2),$$

diviene

$$y'^2=\frac{b'^2}{a'^2}(x''^2-2a'x''^2):$$

allora tanto l'equazione

$$y'^2=\frac{b'^2}{b'^2}(x'^2-a'^2),$$

quanto l'altra

$$y'^2=\frac{b'^2}{a'^2}(x''^2-2a'x''^2),$$

messe rispettivamente sotto la forma

$$\frac{y'^2}{(x'+a')(x'-a')}=\frac{b'^2}{a'^2},$$

ed

$$\frac{y'^2}{x''(x''-2a)}=\frac{b'^2}{a'^2},$$

ci mostrano, che *il quadrato di qualunque semiordinata all' asse* $2a'$ *è al rettangolo delle corrispondenti ascisse d' amb' i vertici*, *come il quadrato del diametro conjugato* a $2a'$ *è* a quello dello *stesso diametro*, e questo potendosi egualmente dimostrare per le ordinate al diametro $2b'$, si potrà generalmente dire, che *nell' iperbole, come nell' Ellisse, il quadrato di una*

semiordinata ad un diametro qualunque è al rettangolo dell' ascisse corrispondenti d' amb' i vertici come il quadrato del diametro conjugato a questo è al quadrato dello stesto diametro.

262. Questa stessa proprietà avendo luogo per più ordinate allo stesso diametro, ne segue, che *i quadrati delle semiordinate ad un diametro qualunque sono fra loro come i rettangoli delle ascisse d' amb' i vertici.*

263. Quindi se dati due diametri conjugati, e l' angolo, sotto cui essi s' inclinano, vogliamo descrivere un' iperbole, non si dee fare, che descrivere l' iperbole, prendendo i due diametri conjugati dati per assi, ed indi menate ad uno di essi varie ordinate, inclinarle allo stesso sotto l' angolo dato: egli è chiaro, che gli estremi di queste ordinate apparterranno all' iperbole, che si domanda, giacchè ha sempre luogo la proprietà che *i quadrati delle semiordinate sono come i rettangoli delle ascisse d' amb' i vertici.*

264. Per avere in tutto l' analogia tra gli assi, ed i diametri conjugati obbliqui, diamo anche a questi un parametro: chiamisi dunque p' il parametro del diametro $2a'$, si avrà (125)

$$p'=\frac{2b'^2}{a'}, \text{ e } \frac{p'}{2a'}=\frac{b'^2}{a'^2}:$$

allora sostituendo questo valore di $\frac{b'^2}{a'^2}$ nell' equazione

$$y'^2=\frac{b'^2}{a'^2}(x'^2-a'^2),$$

e nell' altra

$$y''^2=\frac{b'^2}{a'^2}(x''^2-2ax''),$$

si avrà

$$y'^2=\frac{p'}{2a'}(x'^2-a'^2),$$

ed

$$y''^2=\frac{p'}{2a'}(x''^2-2ax''),$$

le quali messe rispettivamente sotto la forma

$$\frac{y'^2}{x'^2-a'^2}=\frac{p'}{2a'};\ \frac{y''^2}{x''(x''-2ax'')}=\frac{p'}{2a'},$$

ci dimostrano che il *quadrato di una semiordinata ad un diametro qualunque è al rettangolo delle ascisse d' amb' i vertici, com' è il parametro allo stesso diametro.*

265. Si adatti il parametro di un diametro $a'H$ al vertice a' parallelamente al conjugato di questo diametro; indi si uniscano gli estremi H e P del diametro, e del parametro, e si meni un' ordinata MO, la quale si prolunghi in Q fino all' incontro della HQ; chiamando

$$Ha',\ 2a';\ a'P,\ p';\ \text{ed } HN,\ x';$$

allora, poichè al punto H si ha

$$n=0,\ \text{ed } m=2a';$$

ed al punto P

$$n'=-p'\ \text{ed } m'=0,$$

l' equazione della retta HP, sarà come sopra (228)

$$y'=\frac{p'}{2a'}(x'-2a'),$$

quindi sarà

$$NQ=\frac{p'}{2a'}(x'-2a'),$$

ed

$$NQ.a'N=\frac{p'}{2a'}(x'^2-2a'x)=MN^2,$$

dal che ne conchiuderemo, come per gli assi, che *il quadrato di una semiordinata ad un diametro qualunque dell' iperbole è eguale al rettangolo dell' ascissa dal vertice nella corrispondente semiordinata prolungata fino all'incontro della HP, che chiamaremo parimente regolatrice.*

266. Essendo $NQ>a'P$, avrà anche luogo rispetto a diametri qualunque la proprietà dell' iperbole, di essere cioè *il quadrato di una semiordinata maggiore del rettangolo dell' ascissa corrispondente nel parametro.*

267. Ciocchè abbiamo dimostrato nell' ellisse (185) è comune anche all' iperbole, avendo noi ivi considerata una linea di secondo grado a centro.

268. Quindi se si vuol determinare il centro di un' iperbole, non si dee, che far passare una retta per la metà di due corde parallele, e dividere per metà la porzione di questa intercetta tra' due rami delle iperboli opposte.

269. Similmente si dimostrerà, come sopra (187), che una retta, la quale passa pe'l punto, ove una tangente incontra il perimetro iperbolico, e per la metà di una corda parallela al-

la tangente, passerà anche pe 'l centro.

270. Andiamo ora a dimostrare l'inversa della precedente come al n.° (188). A tal effetto si ponga l'equazione generale trasformata sotto la forma

$$y'^2+Px'y'+Qx'^2+R=0:$$

sia AA' il diametro delle x', e KK' quello delle y', che suppongasi parallelo ad una tangente MHO: prendendo un' ascissa QI, sarà per la teoria dell' equazioni

Fig. 39

$$ID-IP=-Px'=-P.QI,$$

e similmente per la stessa ragione

$$2HM=-P.QM;$$

quindi si avrà

$$ID-IP : 2HM=QI : QM.$$

Ciò posto pe 'l punto H di contatto si faccia passare un diametro HH'; si avrà

$$2TI : 2HM=QI : QM;$$

e perciò sarà

$$ID-IP : 2HM=2TI : 2HM,$$

e quindi si avrà

$$ID-IP=2TI,$$

da cui si tira

$$ID-TI=IP+IT,$$

cioè $TP=TD$, e dimostrando lo stesso per qualunque altra ordinata condotta parallelamente a KK', e quindi alla tangente OM, ne conchiuderemo, come nell' ellisse, che nell' i-

perbole ogni diametro divide per metà le ordinate, che gli si menano parallele alla tangente condotta da uno de' suoi estremi; e che sono conjugati due diametri, i quali sono rispettivamente paralleli alle tangenti menate pe' loro vertici.

271. Quindi come nell' ellisse (189) possiamo nell' iperbole, dato un diametro, trovar la posizione del suo conjugato per mezzo della tangente, e viceversa. Cioè nel 1.° caso, basta saper menare una tangente all' iperbole dal vertice del diametro dato, il diametro condotto parallelo a questa tangente sarà quello, che si domanda: nel 2.°, menato un diametro dal punto, ove si domanda menar la tangente, ed indi trovata la posizione del suo conjugato (241), la parallela, che dal punto dato si mena a questo, sarà la tangente richiesta.

272. Se dagli estremi di un diametro $a'H$ si menino due corde ad uno stesso punto del perimetro iperbolico, chiamando $2a'$ un tal diametro l' equazione di queste saranno rispettivamente

$$y=A(x+a'),\ y=A'(x-a'),$$

moltiplicandole, si avrà

$$y^2=AA'(x^2-a'^2),$$

la quale appartenendo all' iperbole, bisogna che sia

$$AA'=\frac{b'^2}{a'^2};$$

cioè il prodotto de' seni degli angoli, che fanno due corde menate dagli estremi di un diametro $2a'$ ad un punto qualunque del perime-

tro della curva iperbolica è $\frac{b'^2}{a'^2}$, indicando con b'^2 il quadrato del semidiametro conjugato a $2a'$. Lo stesso abbiamo veduto aver luogo riguardo agli assi.

273. Nello stesso modo può dimostrarsi, che la condizione dell' incontro sull' iperbole di due corde menate dagli estremi dell' asse

$$2b' \text{ è } \frac{a'^2}{b'^2}.$$

274. Noi lasciamo a' giovani dimostrare l' inversa di questa verità sul modello di ciocchè abbiamo fatto riguardo agli assi (pag. 200).

275. Quindi, se, data un' iperbole, vogliamo menare due diametri conjugati sotto un dato angolo, basterà, menato prima un diametro qualunque (268), descrivere su di questo un segmento circolare capace del dato angolo; e, condotto dagli estremi del diametro due corde ad uno de' punti, ove il segmento taglia il perimetro della curva, menare due diametri paralleli a queste corde; saranno questi i diametri cercati. Questo problema l' abbiamo analizzato col metodo de' moderni (243..245), ove abbiamo indicata la maniera di ritrovare l' equazione dell' iperbole rapporto a due diametri conjugati sotto un dato angolo, data l' equazione rispetto a due diametri qualunque.

276. La costruzione (275) ci darà gli assi, se in vece di descrivere il segmento circolare capace del dato angolo, si descriva un semicerchio.

277. L' equazioni

$$a^2-b^2=a'^2-b'^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1) \,;$$

$$ab=a'b'\text{sen}(y',x') \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$a'^2=\frac{-a^2b^2}{a^2\text{sen}^2(x,x')-b^2\cos^2(x,x')} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$b'^2=\frac{a^2b^2}{a^2\text{sen}^2(x,y')-b^2\cos^2(x,y')} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$a^2\text{sen}[x,x']\text{sen}[x,y']-b^2\cos[x,x']\cos[x,y']=0 \ldots (5)$$

ci danno, come nell' ellisse, le condizioni necessarie per risolvere i problemi, che hanno rapporto a' diametri conjugati dell' iperbole.

278. *E sulle prime dati due diametri conjugati, e l' angolo che formano, ritrovare gli assi dell' iperbole.*

Per mezzo delle due equazioni

$$a^2-b^2=a'^2-b'^2 \,,\; ab=a'b'\text{sen}[a',b'],$$

si elimini una della incognite a, o b; per e. a; si avrà

$$\sqrt{[a'^2-b'^2+b^2]}=\frac{a'b'\text{sen}[a',b']}{b} \,;$$

elevando a quadrato, ed ordinando rispetto a b, si avrà

$$b^4+b^2[a'^2-b'^2]=a'^2b'^2\text{sen}^2[a',b'] \,,$$

da cui si tira

$$b=\pm\sqrt{\left[\frac{(b'^2-a'^2)\pm\sqrt{[(a'^2-b'^2)^2+4a'^2b'^2\text{sen}^2(a',b')]}}{2}\right]}$$

similmente facendo per a, si avrà

$$\sqrt{[a^2-a'^2+b'^2]}=\frac{a'b'\text{sen}[a',b']}{a},$$

da cui si ha, elevando a quadrato, e liberando da fratto

$$a^4-a^2[a'^2-b'^2]=a'^2b'^2\text{sen}^2[a',b'],$$

equazione, la quale sciolta da

$$a=\pm\sqrt{\left[\frac{[a'^2-b'^2]\pm\sqrt{([a'^2-b'^2]^2+4a'^2b'^2\text{sen}^2[a',b'])}}{2}\right]}.$$

279. Ritrovato così il valore degli assi, allora potremo, *dati due diametri conjugati di grandezza, e di sito, e dati anche di grandezza gli assi ritrovare la direzione di essi:* Cioè, come si è fatto nell' ellisse, bisogna combinare le due equazioni

$$a'^2=\frac{-a^2b^2}{a^2\text{sen}^2[x,x']-b^2\cos^2[x,x']},$$

e $\text{sen}^2[x,x']+\cos^2[x,x']=1$,

o le altre due

$$b'^2=\frac{a^2b^2}{a^2\text{sen}^2[x,y']-b^2\cos^2[x,y']},$$

e $\text{sen}^2[x,y']+\cos^2[x,y']=1$:

le prime ci daranno

$$\text{sen}[x,x']=\frac{b}{a'}\sqrt{\left[\frac{a'^2-a^2}{a^2+b^2}\right]},$$

e le altre,

$$\text{sen}[x,y']=\frac{b}{b'}\sqrt{\left[\frac{a^2+b'^2}{a^2+b^2}\right]}.$$

Quindi, chiamando BB' l' asse delle x, AA' Fig. 18

quello delle y, KK' il diametro delle x', ed HH quello delle y', la prima equazione ci farà conoscere l'angolo BQK, e si conoscerà per conseguenza anche l'angolo

$$KQA = D - BQK,$$

con che resterà determinata la direzione degli assi; la seconda equazione poi ci farà conoscere l'angolo BQH, e quindi l'angolo

$$HQA = D - BQH,$$

con che resterà parimente determinata la posizione degli assi.

280. Bisogna riflettere, che l'espressioni

$$\text{sen}[x,x'] = \frac{b}{a'} \sqrt{\left[\frac{a'^2 - a^2}{a^2 + b^2}\right]},$$

$$\text{sen}[x,y'] = \frac{b}{b'} \sqrt{\left[\frac{a^2 + b'^2}{a^2 + b^2}\right]},$$

dati gli assi di grandezza, e di posizione, ci determinano ancora la direzione di due diametri conjugati dati di grandezza.

281. *Dati gli assi di una iperbole, trovare due diametri conjugati, che fanno un dato angolo.*

Questo problema si risolve per mezzo delle stesse equazioni, che il precedente; cioè tra le due condizioni

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2 \; ; \; a'b' \,\text{sen}[a',b'] = ab,$$

prendendo a', e b' per incognite, si elimini una di esse, p. e., a', si avrà

$$\sqrt{[a^2-b^2+b'^2]}=\frac{ab}{\operatorname{sen}[a',b']},$$

elevando a quadrato, ed ordinando per b'^2, si avrà

$$b'^4+b'^2[a^2-b^2]=\frac{a^2b^2}{\operatorname{sen}^2[a',b']},$$

da cui si tira

$$b'^2=\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)\pm\sqrt{\left[\frac{[a^2-b^2]^2}{4}+\frac{a^2b^2}{\operatorname{sen}^2[a',b']}\right]}, \text{ e}$$

$$b'=\pm\sqrt{\left[\frac{[b^2-a^2]+\sqrt{\left([a^2-b^2]^2+\frac{4a^2b^2}{\operatorname{sen}^2[a',b']}\right)}}{2}\right]}.$$

Eliminando b' tra l' equazioni

$$a'^2-b'^2=a^2-b^2, \quad a'b'\operatorname{sen}[a',b']=ab,$$

ed ordinando rispetto ad a', dopo aver posta tutta l'espressione sotto un sol radicale, si avrà

$$a'=\pm\sqrt{\left[\frac{[a^2-b^2]\pm\sqrt{\left([a^2-b^2]^2+\frac{4a^2b^2}{\operatorname{sen}^2[a',b']}\right)}}{2}\right]}.$$

E sono questi i valori di due semidiametri conjugati dell' iperbole, che fanno un dato angolo.

Il problema analitico corrispondente l' abbiamo indicato al di sopra, rapportando cioè l' iperbole degli assi a due diametri conjugati sotto un dato angolo.

CAPO X.

Iperbole tra gli Asintoti.

282. La maniera di considerare (67) le rette inclinate dal centro dell' iperbole sull' asse $2a$ di essa sotto un' angolo indicato dalla tangente $\pm\frac{b}{a}$, come il limite de' raggi della curva, ha fatto sorgere l' idea degli asintoti : infatti rendendosi sempre più piccola l' espressione di AT, al crescere di x, val quanto dire avvicinandosi in tal caso a divenire sempre più eguali l' espressioni

$$\pm\frac{b}{a}x,$$

e
$$\pm\frac{b}{a}x\sqrt{\left[1-\frac{a^2}{x^2}\right]},$$

che sono le rispettive equazioni di quelle rette, e dell' iperbole, la prima viene presa come limite della seconda.

283. Estendiamo questa idea, e portiamola sull'equazione generale, per esibire sotto il massimo aspetto di generalità la teoria degli asintoti dell' iperbole.

L' equazione generale delle linee di 2.° ordine sciolta rispetto ad y da

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm$$

$$\frac{1}{2A}\sqrt{[(B^2-4AC)x^2+(2BD-4AE)x+D^2-4AF]}.(1)$$

e, sciogliendola rispetto ad x si avrà

$$x=-\frac{By+E}{2C}\pm$$

$$\frac{1}{2C}\sqrt{[}(B^2-4AC)y^2+(2BE-4CD)y+(E^2-4CF)] \quad (2).$$

Queste espressioni possono mettersi rispettivamente sotto la seguente forma

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm$$

$$\frac{x^2}{2A}\left(B^2-4AC+\frac{2(BD-2AE)}{x}+\frac{D^2-4AF}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1')$$

$$x=-\frac{By+E}{2C}\pm$$

$$\frac{y^2}{2C}\left(B^2-4AC+\frac{2(BE-2CD)}{y}+\frac{E^2-4CF}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2').$$

Se si faccia

$$B^2-4AC=\alpha\,;$$

$$\frac{2(BD-2AE)}{x}+\frac{D^2-4AF}{x^2}=\beta\,;$$

$$\frac{2(BE-2CD)}{y}+\frac{E^2-4CF}{y^2}=\gamma\,;$$

sviluppando le formole

$$(\alpha+\beta)^{\frac{1}{2}},\ (\alpha+\gamma)^{\frac{1}{2}},$$

e sostituendo ad α, β, γ i loro valori rispettivi, limitandoci alla prima potenza decrescente di x nel primo caso, e di y nel secondo, si avrà

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm$$

$$\frac{1}{2A}\left[x\sqrt{(B^2-4AC)}+\frac{(BD-2AE)}{\sqrt{(B^2-4AC)}}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{x}\left(\frac{D^2-4AF}{2\sqrt{(B^2-4AC)}}-\frac{4(BD-2AE)^2}{8\sqrt{(B^2-4AC)^3}}\right)\right]+\text{ec.}\ (1'')$$

e

$$x=-\frac{By+E}{2C}\pm$$

$$\frac{1}{2C}\left[y\sqrt{(B^2-4AC)}+\frac{BE-2CD}{\sqrt{(B^2-4AC)}}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{y}\left(\frac{E^2-4CF}{2\sqrt{(B^2-4AC)}}-\frac{4(BE-2CD)^2}{8\sqrt{(B^2-4AC)^3}}\right)\right]+\text{ec.}\ (2'')$$

Le quantità moltiplicate per $\frac{1}{x}$ in (1''), e per $\frac{1}{y}$ in (2'') vanno sempre più diminuendo a proporzione che nella (1'') cresce x, e nella (2'') y, cosicchè, fatto $x=\infty$, ed $y=\infty$ si avrà

$$\frac{1}{x}\left(\frac{D^2-4AF}{2\sqrt{(B^2-4AC)}}-\frac{4(BD-2AE)^2}{8\sqrt{(B^2-4AC)^3}}\right)=\frac{1}{\infty},$$

ed

$$\frac{1}{y}\left(\frac{E^2-4CF}{2\sqrt{(B^2-4AC)}}-\frac{4(BE-2CD)^2}{8\sqrt{(B^2-4AC)^3}}\right)=\frac{1}{\infty};$$

Allora la formola (1'') diverrà

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm$$

$$\frac{1}{2A}\left[x\sqrt{(B^2-4AC)} + \frac{BD-2AE}{\sqrt{(B^2-4AC)}} \quad \ldots (1'''),\right]$$

e l' altra (2'')

$$x = -\frac{By+E}{2C} \pm$$

$$\frac{1}{2C}\left[y\sqrt{(B^2-4AC)} \pm \frac{BE-2CD}{\sqrt{(B^2-4AC)}}\right] \ldots (2''');$$

e'l valore di y, (1'''), e di x (2''') sarà il limite rispettivamente di quello (1''), e (2''). Quindi le linee dell' equazioni (1'''), e (2''') saranno rispettivamente i limiti di quelle dell' equazioni (1''), e (2''). Or l' equazioni (1'''), e (2''') rappresentano il sistema di due rette, e le altre (1''), e (2'') sono l' equazioni dell' iperbole rapportate rispettivamente ora ad un asse, ora all' altro; ne segue dunque, che la curva non potrà giammai uscire dall' angolo di tali rette, nè potrà per conseguenza raggiugnerle, tuttocchè continuamente va avvicinandovisi.

284. Segue da ciò, che le rette dell'equazione (1'''), e le altre dell' equazione (2''') sono gli asintoti della curva rappresentata rispettivamente dall' equazioni (1''), (2'').

285. Se si ha

$$B^2-4AC=0,$$

l' equazioni (1'''), e (2''') daranno per y, ed x rispettivamente due valori infiniti, e se si ha

$$B^2-4AC<0,$$

i valori di y, e di x saranno inmaginarii; dunque l'equazioni (1'''), (2''') non reggono, che alla condizione

$$B^2-4AC>0.$$

Quindi fra le linee di 2.° grado la sola iperbole è curva asintotica.

286. Si faccia

$$y+\frac{Bx+D}{2A}=z,$$

ed

$$x+\frac{By+E}{2C}=z'$$

l'equazione (1''') diverrà

$$z=\pm\frac{1}{2A}\left[x\surd[B^2-4AC]+\frac{BD-2AE}{\surd(B^2-4AC)}\right]\ldots(1'''')$$

e l'altra (2''') si trasformerà in

$$z'=\pm\frac{1}{2C}\left[y\surd[B^2-4AC]+\frac{BE-2CD}{\surd(B^2-4AC)}\right].(2'''').$$

Dunque gli asintoti sono simmetricamente situati riguardo al diametro la cui equazione è

$$y=-\frac{Bx+D}{2A},$$

o

$$x=-\frac{By+E}{2C};$$

essendo il coefficiente di x, identico, e di segno contrario nelle due equazione (1''''), co-

me lo è quello di y nelle due equazioni $(2'''')$, il che è analogo a ciocchè si è detto (67).

287. Se nell' equazione $(1''')$ si faccia

$$x\sqrt{[B^2-4AC]}+\frac{BD-2AE}{\sqrt{[B^2-4AC]}}=0 \quad . \quad . \quad . \quad (m),$$

rimarrà

$$y=\frac{Bx+D}{2A},$$

equazione del diametro (54); ma l' equazione (m) da

$$x=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC},$$

ascissa al centro della curva (52 pag. 52); dunque l'asintoto dell' equazione $(1''')$, e 'l diametro dell' equazione

$$y+\frac{Bx+D}{2A}=0,$$

si tagliano al centro. Tali sono il diametro BB', Tav. IV Fig. 4 e l' asintoto ZZ' (a). Similmente, facendo nell' equazione $(2''')$

$$y\sqrt{(B^2-4AC)}+\frac{BE-2CD}{\sqrt{[B^2-4AC]}}=0 \quad . \quad . \quad . \quad (n),$$

essa si ridurrà ad

$$x+\frac{By+E}{2C}=0,$$

(a) Per chiarezza abbiamo contradistinti cogli stessi segni gli assi coordinati primitivi XX', YY', e ciascun diametro $X''Y''$, col corrispondente asintoto ZZ'.

equazione dell' altro diametro AA'', e poichè l' equazione (n) da

$$y=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC},$$

ordinata al centro, ne segue, che, l' asintoto VV' e'l diametro AA'' si taglieranno benanche al centro; dunque il centro dell' iperbole è l' origine comune di due asintoti; e ciò è analogo a ciocchè si è detto al di sopra (67), ove l' equazione degli asintoti è sorta al porre $M=0$ nell' equazione dell' iperbole, presa l' origine delle coordinate al centro.

288. Rappresenti ($1'''$) l' equazione degli asintoti ZZ' VV' riguardo all' asse XX', la quantità

$$-\frac{B\pm\sqrt{[B^2-4AC]}}{2A},$$

ch' è il coefficiente della x fisserà rispettivamente la posizione di essi rispetto a tal asse, cioè menato una parallela CT ad XX' la quantità

$$-\frac{B+\sqrt{[B^2-4AC]}}{2A} \; . \; . \; . \; (t),$$

riguarderà l' angolo $V'CT$ e l' altra

$$-\frac{B-\sqrt{[B^2-4AC]}}{2A} \; . \; . \; . \; (s),$$

avrà riguardo all' angolo $Z'CT$. Similmente la posizione degli asintoti dell' equazione ($2'''$), che supponiamo per un momento essere CR, CR', rispetto all' asse YY' è fissata da

$$-\frac{B\pm\sqrt{[B^2-4AC]}}{2C}$$

coefficiente di y, ove, menata CS parallela ad YY', la quantità

Tav. I. Fig. 4

$$-\frac{B+\sqrt{[B^2-4AC]}}{2C},$$

riguarderà l'angolo $R'CS$, e l'altra

$$-\frac{B-\sqrt{[B^2-4AC]}}{2C},$$

riguarderà l'angolo RCS. Se l'equazione ($2'''$) si ordini per y, chiamando H la quantità costante, si avrà

$$y=\frac{2Cx}{-B\pm\sqrt{[B^2-4AC]}}+H;$$

ed allora la quantità

$$\frac{2C}{-B+\sqrt{[B^2-4AC]}},$$

riguarderà l'angolo RCT, e l'altra

$$\frac{2C}{-B-\sqrt{[B^2-4AC]}},$$

avrà riguardo all'angolo $R'CT$, ossia il suo supplemento $R''CT$. Moltiplichiamo il numeratore, e'l denominatore del fratto

$$\frac{2C}{-B+\sqrt{[B^2-4AC]}},$$

per

$$B+\sqrt{[B^2-4AC]}\,;$$

siccome il numeratore, e 'l denominatore del fratto

$$\frac{2C}{-B-\sqrt{[B^2-4AC]}}$$

per

$$B-\sqrt{[B^2-4AC]}\,;$$

si avrà riducendo,

$$\frac{2C}{-B+\sqrt{[B^2-4AC]}}=\frac{-B-\sqrt{[B^2-4AC]}}{2A}\ldots(r),$$

$$\text{e}\ \frac{2C}{-B-\sqrt{[B^2-4AC]}}=\frac{-B+\sqrt{[B^2-4AC]}}{2A}\ldots(p):$$

quindi la quantità (r) si rapporterà all' angolo $R''CT$, e l'altra (p) riguarderà l'angolo RCT; ma l'espressione (r) è identica all' altra (s), siccome (p) lo è all' espressione (t); dunque sarà per conseguenza l'angolo $R''CT$ eguale a $Z'CT$, ed RCT aguale a $V'CT$; cioè gli asintoti dell' equazione $(1''')$ saranno gli stessi dell' equazione $(2''')$, le quali per conseguenza non differiscono tra loro, se non perchè la prima analizza la posizione degli asintoti rispetto all' asse XX', ed all' iperboli

$$H'B'K'HBK\,,$$

e l' altra riguarda gli asintoti rispetto all' asse YY', ed alle iperboli

$$M'A'N'MA'N,$$

conjugate alle prime.

Dunque *le iperboli opposte, e le conjugate hanno lo stesso assintoto.*

289. Essendoci nota l'equazione degli asintoti rispetto a ciascuno degli assi coordinati, possiamo determinare l'angolo di essi (52). Quindi, chiamando φ l'angolo degli asintoti, e chiamando ψ, λ rispettivamente l'espressioni

$$-\frac{B+\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A},$$

e

$$-\frac{B-\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A},$$

che sono le rispettive tangenti degli angoli fatti dagli asintoti coll' asse delle ascisse, si avrà

$$\tang\varphi=\frac{\psi+\lambda}{1-\psi\lambda}=\frac{B}{C-A}\ldots(K).$$

Ciò posto, o si ha

$C-A=0\ldots(r)$, o $(C-A)>0\ldots(s)$, o $(C-A)<0\ldots(t)$

Nel primo caso l'espressione (K) diverrà infinita, e l'angolo asintotico sarà retto (trig. 17); nel secondo l'espressione (K) sarà positiva, e l'angolo asintotico sarà acuto; nel terzo poi (K) sarà negativa, e l'angolo asintotico sarà ottuso (trig. 14).

Or l'equazione

$$(C-A)=0;$$

da anche $B=0$ (86), per cui l'iperbole sarà parilatera; Similmente l'equazione (s) ci da

$$(C-A)^2>0,$$

e quindi

$$(C-A)^2+B^2>0,$$

e $$\sqrt{[(C-A)]^2+B^2}>0\ ;$$

sicchè si avrà

$$A+C+\sqrt{[(C-A)]^2+B^2}>A+C-\sqrt{[(C-A)]^2+B^2}$$

e $$(B^2-4AC)(A+C+\sqrt{[(C-A)]^2+B^2})>$$

$$(B^2-4AC)(A+C)-\sqrt{[(C-A)]^2+B^2}\ ;$$

Quindi il valore (S)(85) dell' asse $2a'$ sarà minore dell' altro (T) dell' asse $2b'$, dal che ne segue, ch' essendo CA il semiasse b', e CB l' altro a', l' angolo $Y'CX$ sarà acuto, e quindi il suo supplemento XCY ottuso, e con ciò resta anche dimostrato, che la condizione

Tav. III Fig. 19

$$C-A<0\ ,$$

rende l'angolo $Y'CX$ ottuso.

Da tuttocciò potremo conchiudere, *che l' angolo asintotico nell' iperbole parilatera è retto, e ch' essendo $2b'$ l' asse rispettivamente a cui si considera l' inclinazione degli asintoti, l' angolo asintotico sarà ottuso se si ha*

$$2a'>2b',$$

ed acuto, se all' opposto è $2a'<2b'$ (a).

(a) Questo può anche rilevarsi con sostituire nella quantità $\frac{a''-a'''}{1-a''a'''}$ in luogo di a'', e a''' la quantità $\frac{b}{a}$, che sappiamo essere la tangente dell' angolo che l' asintoto fa coll' asse $2a$ rispetto a cui si è esaminato l' inclinazione degli asintoti ( ), facendone la sostituzione, si avrà tang. ang. asint $\frac{2ab}{a^2-b^2}$, quantità infinita, positiva, o negativa, secondo che si ha $a=b$, $a>b$, [illegible]

290. Paragoniamo l' equazione ($1''$) all'altra

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{(x-n)}{2A}\sqrt{[B^2-4AC]}\ \ldots\ (R)$$

(79 pag. 76): poichè la quantità n rappresenta (78 pag. 76) le radici dell' equazione

$$x^2+2\frac{BD-2AE}{B^2-4AC}x+\frac{D^2-4AF}{B^2-4AC}=0 (77, \text{pag}. 75),$$

e nell' equazione (R) tali radici sono eguali (79, pag. 78), si avrà

$$n=-\frac{BD-2AE}{(B^2-4AC)},$$

e l' equazione (R), sostituitovi il valore di n, diverrà

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\left(x\sqrt{[B^2-4AC)}+\frac{BD-2AE}{\sqrt{[B^2-4AC]}}\right)$$

identica all' equazione ($1'''$). Dunque il sistema delle rette costruite dall' equazione (R) (79) è quello degli asintoti; ma l' equazione (R) si è analizzata al di sopra sotto il carattere dell' iperbole

$$B^2-4AC>0;$$

ed è dippiù la stessa equazione generale delle linee di 2.° grado ridotta sotto quella forma per

---

di nel primo caso l' angolo è retto, nel secondo acuto, nel 3.° ottuso; ma noi per far tutta dipendere la teoria degli asintoti dall'equazione ($1'''$), abbiamo creduto meglio seguire le traccie, e la generalità della n.^a analisi.

la condizione (II) (77, pag. 75); dunque, avendo ancora riguardo al passaggio dell' equazioni (1″), e (2″) nelle altre (1‴), e (2‴), delle quali le prime sono all' iperbole, le seconde a' suoi asintoti, cioè, allorchè x nel primo caso, ed y nel secondo divengono infiniti; ne segue, che potremo riguardare gli asintoti, come il prolungamento dell' elemento estremo de' quattro rami dell' iperboli opposte considerate come un poligono d' un grandissimo numero di lati infinitamente piccoli.

Questo modo di considerar gli asintoti annunciatoci con tanta chiarezza dalla n.ª analisi è il più generale, e ci porge di essi l' idea la più conveniente alla natura del metodo de' limiti da noi quì adoprato.

291. Segue da tuttocciò, che noi possiamo agevolmente costrüire gli asintoti di un' iperbole dataci per mezzo della sua equazione, rilevandone l' equazione degli asintoti col paragone de' coefficienti numerici di questa con quelli dell' equazione (1‴), o (2‴), secondochè si vuol rapportare l' iperbole all'asse delle x, o a quello delle y, e costruendo l' equazione risultante sugli assi XX', YY', col metodo del n.º (30).

Tav. IV Fig. 4

292. Supponiamo nell' equazione (1‴) $C=0$, si avrà pe 'l segno superiore

$$y=-\frac{E}{B},$$

e per l' inferiore

$$y=-\frac{B}{A}x+\frac{AE-BD}{AB};$$

la prima c' indica che uno degli asintoti è parallelo all' asse delle x, e la seconda ci annunzia, che l' altro asintoto è inclinato all' asse delle x sotto un' angolo contrasegnato della tangente trigonometrica $-\frac{B}{A}$, tagliando l' asse delle y ad una distanza dall' origine eguale ad

$$\frac{AE-BD}{AB}.$$

Per costruire questi asintoti, sia HBK, $H'B'K'$ l' iperbole rapportata agli assi coordinati AX, AY: si prenda sull' asse AY una retta Tav. II Fig. 8

$$AP = -\frac{E}{B},$$

e pe 'l punto P si meni una retta ZZ' parallela all' asse AX; sarà la retta ZZ' uno degli asintoti: di poi si tagli sull' asse AY una quantità eguale ad

$$\frac{AE-BD}{AB},$$

e sull' asse AX la grandezza

$$AO = \frac{AE-BD}{B^2},$$

e la retta, che passa per questi due punti, sarà l' altro asintoto.

Le quantità

$$\frac{E}{B}, \frac{AE-BD}{AB}, \frac{AB-BD}{B^2},$$

possono avere il doppio segno $\pm$; ciò non osta alla n.[a] costruzione, e solo ha riguardo alla posizione degli asintoti riguardo agli assi coordinati (30. pag. 31).

293. Se poi si ha insieme $C=0$, ed $E=0$, l'equazione (1''') darà

$$y=0\text{ , ed } y=-\frac{Bx+D}{A}.$$

La prima c'indica, che uno degli asintoti è lo stesso asse delle x, e l'altra ci annunzia, che l'altro asintoto s'inclina all'asse del x sotto un angolo contrasegnato dal rapporto delle quantità B, ed A, tagliando l'asse delle ordinate in un punto distante dall'origine per $-\frac{D}{A}$. Così XX' è uno degli asintoti, e l'altro è ZY' condotto pe' punti Z, e C distanti rispettivamente dall'origine A per $-\frac{D}{A}$, e $-\frac{D}{B}$.

Tav. IV Fig. 6

294. Similmente la supposizione di $A=0$ nell'equazione (2''') da

$$x=-\frac{D}{B}\ldots(i),$$

ed

$$x=-\frac{By}{C}+\frac{CD-BE}{CB}\ldots(f).$$

L'asintoto della equazione (i) sarà parallelo all'asse delle y, e resterà costruito, prendendo sull'asse AX una retta

Tav. IV Fig. 3

$$AY=-\frac{D}{B},$$

e menando per Y' la retta $Y''Y'$ parallela all' asse AY: l' asintoto poi dell' equazione (f) si avrà, facendo passare una retta pe' punti O e P distanti rispettivamente dall' origine A per

$$\frac{CD-BE}{CD},$$

e per

$$\frac{CD-BE}{B^2}.$$

Se poi nell' equazione $(2''')$ manchino insieme A, e D, essa darà

$$x=0 \ldots (g),$$

ed

$$x=-\frac{B}{C}y-\frac{E}{C} \ldots (h):$$

l' equazione (g) indica che uno degli asintoti è l' asse stesso delle y, e l' equazione (h) dimostra che l' altro è la retta, che fa coll' asse delle y un angolo contrasegnato dal rapporto delle quantità B, e C, e che taglia l' asse delle x in un punto distante dall' origine per $-\frac{E}{C}$. Così YY' è un asintoto, e l'altro è ZZ', che passa pe' punti O, e C distanti dall' origine A rispettivamente per $-\frac{E}{C}$, e $-\frac{E}{B}$.

Tav. IV Fig. 8

265. Segue da tutto ciò, che se nell' equazione generale manca il quadrato x^2, e l'altro y^2, uno degli asintoti sarà parallelo all' asse delle x, e l' altro a quello delle y. E se mancano insieme i qua-

drati delle variabili colle prime potenze di esse, gli assi stessi coordinati diverranno asintoti. Nel 1.° caso l'equazione generale alle linee di 2.° grado si ridurrà sotto la forma

$$Bxy+Dy+Ex+F=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (c),$$

e nel secondo sotto l'altra

$$Bxy+F=0,$$

ossia

$$xy=-\frac{F}{B} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d):$$

or l'equazione (c) è identica all'altra

$$\left(y+\frac{E}{B}\right)\left(x+\frac{D}{B}\right)=\frac{ED-BF}{B^2} \; . \; . \; (c'),$$

come abbiamo osservato al disopra (76), ed ivi ancora l'abbiamo ridotta sotto l'altra forma

$$y'x'=H \; . \; . \; . \; . \; (e),$$

facendo

$$y+\frac{E}{B}=y', \; x+\frac{D}{B}=x',$$

ed

$$\frac{ED-BF}{B^2}=H;$$

dunque generalmente sotto l'aspetto

$$x'y'=H \; . \; . \; . \; (e),$$

si presenta l'equazione dell'iperbole tra gli asintoti, con che si è direttamente dimostrato che (e) è la forma dell'equazione dell'iperbole tra gli asintoti, come abbiamo promesso (pag. 173).

296. La quantità H tanto nell'equazione (d), quanto nell' altra (e) la chiamaremo *potenza* dall'iperbole tra gli asintoti, ed in appresso n'esibiremo in disegno la figura, cui essa è eguale. Ciò posto se nelle formole (S), e (T) (85) facciamo

$$A=0\,,\ C=0\,,\ D=0\,,\ E=0\,,$$

condizioni, che riguardano l'equazione (d), si avrà

$$a'^2=-\frac{2F}{B}\ \text{(a)},$$

e

$$-b'^2=\frac{2F}{B}\,,$$

cioè

$$b'^2=-\frac{2F}{B}\,,$$

e quindi

$$\frac{a'^2+b'^2}{4}=-\frac{F}{B}\,.$$

Similmente, se nelle medesime formole supponiamo

$$A=0\,,\ C=0\,,$$

condizioni, che riguardano l'equazione (c), esse daranno

$$a'^2=2\frac{(ED-BF)}{B^2}\,,$$

(a) La quantità F si è presa negativamente nell' equazione generale (1) (52), da cui sono derivate le formole (S), e (T), laddove nell' equazione ((e), 283) si è presa positivamente.

e $$b'^2=\frac{2(ED-BF)}{B^2};$$

quindi sarà

$$\frac{a'^2+b'^2}{4}=\frac{ED-BF}{B^2},$$

ch'è la quantità costante nell'equazione (c'). Dunque tanto la potenza dell'iperbole (d), quanto l'altra dell'iperbole (c') è la quarta parte della somma de' quadrati de' semiassi dell' iperbole, ossia la quarta parte del quadrato dell' eccentricità.

297. Gli asintoti dell'equazione (c) si avranno, determinando il centro dell' iperbole per mezzo delle coordinate AN, NC rispettivamente eguali a $-\frac{D}{B}$, e $-\frac{E}{B}$, com'è chiaro dall'equazione (c'), e da ciocchè si è detto qui sopra (291...294), ed indi menando da C le rette ZZ', ed YY' rispettivamente parallele ad AX, AY: e gli asintoti dell' equazione (d) saranno i stessi assi coordinati XX', YY'.

Tav. IV Fig. 9

298. Segue da tuttocciò, che il sistema degli asintoti non è che il sistema di due diametri, e che per conseguenza l' esame dell' iperbole tra gli asintoti non è che un caso del problema generale risoluto al cap. IX. con cui si rapporta l' iperbole a' suoi diametri. Degli esempj porteranno questa teoria al massimo grado di chiarezza.

Tav. IV Fig. 10

299. Prima di tutto crediamo vantaggioso di presentare de' modelli generali, giacchè così gli esempj non divengono, che de' casi particolari di essi.

Sia l' equazione

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=o \ldots [1],$$

che supponiamo appartenere all' iperbole; vogliamo rapportarla agli asintoti.

Dovendo essere gli asintoti i diametri di (1), ed essendo al centro l' origine di tali diametri (287), fa di uopo trasformarla mercè le note formole

$$x=x'\cos(x,x')+y'\cos(x,y'),$$

ed

$$y=x'\mathrm{sen}(x,x')+y'\mathrm{sen}(x,y')\ [50,\mathrm{III}].$$

Eseguendo la trasformazione, ed ordinando, si avrà

$$\left.\begin{array}{l}[A\mathrm{sen}^2(x,y')+B\mathrm{sen}(x,y')\cos(x,y')+C\cos^2(x,y')]y^2\\ +[A\mathrm{sen}^2(x,x')+B\mathrm{sen}(x,x')\cos(x,x')+C\cos^2(x,x')]x^2+\\ \quad [2A\mathrm{sen}(x,x')\mathrm{sen}(x,y')+\\ B[\mathrm{sen}(x,x')\cos(x,y')+\mathrm{sen}(x,y')\cos(x,x')]+\\ \quad 2C\cos(x,x')\cos(x,y')]xy+\\ \quad [D\mathrm{sen}(x,x')+E\cos(x,x')]x+\\ \quad [D\mathrm{sen}(x,y')+E\cos(x,y')]y+F=o.\end{array}\right\}(m)$$

L' ipotesi degli asintoti dà luogo alle seguenti condizioni

$$A\mathrm{sen}^2(x,y')+B\mathrm{sen}(x,y')\cos(x,y')+C\cos^2(x,y')=o \ldots (\alpha);$$
$$A\mathrm{sen}^2(x,x')+B\mathrm{sen}(x,x')\cos(x,x')+C\cos^2(x,x')=o \ldots (\beta).$$

$$\left.\begin{array}{l}
\left[y+\dfrac{D\,\mathrm{sen}(x,x')+E\cos(x,x')}{2A\,\mathrm{sen}(x,x')\,\mathrm{sen}(x,y')+B[\mathrm{sen}(x,x')\cos(x,y')+\mathrm{sen}(x,y')\cos(x,x')]+2C\cos(x,x')\cos(x,y')}\right]\\[2ex]
\left[x+\dfrac{D\,\mathrm{sen}(x,y')+E\cos(x,y')}{2A\,\mathrm{sen}(x,x')\,\mathrm{sen}(x,y')+B[\mathrm{sen}(x,x')\cos(x,y')+\mathrm{sen}(x,y')\cos(x,x')]+2C\cos(x,x')\cos(x,y')}\right]\\[2ex]
-\left[\dfrac{D\,\mathrm{sen}(x,x')+E\cos(x,x')}{2A\,\mathrm{sen}(x,x')\,\mathrm{sen}(x,y')+B[\mathrm{sen}(x,x')\cos(x,y')+\mathrm{sen}(x,y')\cos(x,x')]+2C\cos(x,x')\cos(x,y')}\right]\\[2ex]
\left[\dfrac{D\,\mathrm{sen}(x,y')+E\cos(x,y')}{2A\,\mathrm{sen}(x,x')\,\mathrm{sen}(x,y')+B[\mathrm{sen}(x,x')\cos(x,y')+\mathrm{sen}(x,y')\cos(x,x')]+2C\cos(x,x')\cos(x,y')}\right]\\[2ex]
+\dfrac{F}{2A\,\mathrm{sen}(x,x')\,\mathrm{sen}(x,y')+B[\mathrm{sen}(x,x')\cos(x,y')+\mathrm{sen}(x,y')\cos(x,x')]+2C\cos(x,x')\cos(x,y')}
\end{array}\right\}\ldots(n)$$

500. L'equazione (n) è quella dell'iperbole tra gli asintoti: bisogna ora ridurla, determinando

$$\text{sen}(x,x),\ \text{sen}(x,y'),\ \cos(x,x'),\ \cos(x,y'),$$

in funzione de' coefficienti dell'equazione [1].

A tal effetto, poichè l'equazione (a) si compone di

$$\text{sen}[x,y'],$$

e

$$\cos[x,y'],$$

come l'altra $[b]$ di

$$\text{sen}[x,x'],$$

e

$$\cos[x,x'],$$

sarà l'angolo $[x,y']$ eguale all'altro $[x,x']$, come dovea esserlo per la situazione simmetrica degli asintoti riguardo agli assi: quindi basta determinare uno di questi angoli. Si divida perciò l'equazione $[a]$ per

$$\cos^2[x,y'],$$

ridotta, e sciolta, darà

$$\text{tang}[x,y'] = \frac{-B \pm \sqrt{[B^2-4AC]}}{2A},$$

espressione per altro nota da (288), cioè sarà

$$\text{tang}[x,y'] = \frac{-B + \sqrt{[B^2-4AC]}}{2A},$$

e

$$\text{tang}[x,x'] = \frac{-B - \sqrt{[B^2-4AC]}}{2A};$$

e quindi si avrà

$$\operatorname{sen}(x,y')=\frac{\operatorname{tang}(x,y')}{\sqrt{[1+\operatorname{tang}^2(x,y')]}}=\frac{-B+\sqrt{[B^2-4AC]}}{\sqrt{[4A^2+(\sqrt{[B^2-4AC]}-B)^2]}}$$

$$\cos(x,y')=\frac{1}{\sqrt{[1+\operatorname{tang}^2(x,y')]}}=\frac{2A}{\sqrt{[4A^2+(\sqrt{[B^2-4AC]}-B)^2]}}$$

$$\operatorname{sen}(x,x')=\frac{\operatorname{tang}(x,x')}{\sqrt{[1+\operatorname{tang}^2(x,x')]}}=\frac{-B-\sqrt{(B^2-4AC)}}{\sqrt{[4A^2+(\sqrt{[B^2-4AC]}+B)^2]}}$$

$$\cos(x,x')=\frac{1}{\sqrt{[1+\operatorname{tang}^2(x,x')]}}=\frac{2A}{\sqrt{[4A^2+(\sqrt{[B^2-4AC]}+B)^2]}}$$

E colla sostituzione di questi valori nell' equazione (n), questa diverrà

$$\left\{\begin{array}{l}\left[y+\frac{[DB+D\sqrt{(B^2-4AC)}-2AE]\sqrt{[4A^2+(\sqrt{[B^2-4AC]}-B)^2]}}{4A[B^2-4AC]}\right] \\ \left[x+\frac{[DB-D\sqrt{(B^2-4AC)}-2AE]\sqrt{[4A^2+(\sqrt{[B^2-4AC]}+B)^2]}}{4A(B^2-4AC)}\right] \\ +\left[\frac{[DB+D\sqrt{(B^2-4AC)}-2AE]\sqrt{[4A^2+(\sqrt{[B^2-4AC]}-B)^2]}}{4A(B^2-4AC)}\right] \\ \left[\frac{[DB-D\sqrt{(B^2-4AC)}-2AE]\sqrt{[4A^2+(\sqrt{[B^2-4AC]}+B)^2]}}{4A(B^2-4AC)}\right] \\ +\frac{F\sqrt{[16A^2(A^2+[B^2-2AC])+(B^2-4AC)(B^2-4AC-2B^2)+B^4]}}{4A(B^2-4AC)}=0.\end{array}\right\}(n')$$

La potenza dell' equazione (n') può mettersi sotto di questa forma

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{(CD^2-EBD+AE^2-F[B^2-4AC])}{2(B^2-4AC)(A+C+\sqrt{[(C-A)^2+B^2]})} \\ -\dfrac{(CD^2-EBD+AE^2-F[B^2-4AC])}{2(B^2-4AC)(A+C-\sqrt{[(C-A)^2+B^2]})} \end{array}\right\} (n''),$$

e paragonando (n'') co' valori (S), e (T) de' quadrati de' semiassi (85), la detta potenza sarà ancora

$$\frac{a'^2+b'^2}{4}=\frac{e^2}{4},$$

come abbiamo osservato anche al di sopra (296).

Quindi ne segue, che *la potenza dell' iperbole tra gli asintoti è eguale costantemente alla quarta parte dell' eccentricità.*

301. Egli è agevole ora il dimostrare, che un' equazione della forma $[n']$ non può appartenere che all' iperbole tra gli asintoti. Infatti, se l' equazione $[n']$ si presenti così

$$[y+\frac{P}{Q}][x+\frac{R}{Q}]-\frac{P}{Q}.\frac{R}{Q}+\frac{K}{Q}=0,$$

ossia, ch' è lo stesso

$$x'y'=H.$$

ridotta darà

$$Qyx+Px+Ry+K=0;$$

allora saranno zero i coefficienti di y^2, ed x^2, ed avranno luogo per conseguenza l' equazioni $[\alpha]$, e $[\beta]$; le quali ci danno

$$\text{tang}(x,y')=\text{tang}(x,x')=\frac{-B\pm\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A},$$

espressione identica al coefficiente di x nell' equazione ($1'''$), ch'è quell' appunto degli asintoti; ed ecco dimostrato, come abbiamo promesso pag. 73, che l' equazione della forma

$$x'y'=H$$

non può appartenere, che all' iperbole tra gli asintoti.

302. L' equazione ($1'''$), e l'altra(u')presentano ciocchè vi è di più generale per la soluzione de' due problemi.

1.° *Data l' equazione di un' iperbole, ritrovar quella de' suoi asintoti.*

2.° *Data l' equazione di un iperbole, ritrovar l' equazione della stessa iperbole rapportata agli asintoti.*

303. Si voglia rapportare a' suoi asintoti l'equazione dell' iperbole

$$3y^2+2xy-2x^2+3y-2x+2=0 \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Siccome il calcolo eseguito sull' equazioni co' coefficienti numerici riesce oltremodo più agevole di quello eseguito su' coefficienti generali; noi eseguiremo su di questa il calcolo direttamente: trasformiamola dunque per mezzo delle note formole.

$$x=x'\cos(x,x')+y'\cos(x,y'),$$

ed

$$y=x'\text{sen}(x,x')+y\text{sen}(x,y'),$$

si avrà, facendo,

$$\theta=(x,y')$$

e $$\varphi=(x,x'),$$

ed ordinando la trasformata

$$\left.\begin{aligned}&(3\mathrm{sen}^2\theta+2\mathrm{sen}\theta\cos\theta-2\cos^2\theta)y^2\\&+(3\mathrm{sen}^2\varphi+2\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi-2\cos^2\varphi)x^2\\&+(6\mathrm{sen}\varphi\mathrm{sen}\theta+2\mathrm{sen}\varphi\cos\theta+2\mathrm{sen}\theta\cos\varphi-4\cos\theta\cos\varphi)x'y'\\&+(3\mathrm{sen}\theta-2\cos\theta)y'+(3\mathrm{sen}\varphi-2\cos\varphi)x'+2=0.\end{aligned}\right\}\ldots(2)$$

Paragonando quest' equazione all' altra (n'), per avere la condizione degli asintoti, si avrà

$$\left.\begin{aligned}&\left(y+\frac{3\mathrm{sen}\varphi-2\cos\varphi}{6\mathrm{sen}\varphi\mathrm{sen}\theta+2\mathrm{sen}\varphi\cos\theta+2\mathrm{sen}\theta\cos\varphi-4\cos\theta\cos\varphi}\right)\\&\left(x+\frac{3\mathrm{sen}\theta-2\cos\theta}{6\mathrm{sen}\varphi\mathrm{sen}\theta+2\mathrm{sen}\varphi\cos\theta+2\mathrm{sen}\theta\cos\varphi-4\cos\theta\cos\varphi}\right.\\&-\frac{(3\mathrm{sen}\varphi-2\cos\varphi)(3\mathrm{sen}\theta-2\cos\theta)}{(6\mathrm{sen}\varphi\mathrm{sen}\theta+2\mathrm{sen}\varphi\cos\theta+2\mathrm{sen}\theta\cos\varphi-4\cos\theta\cos\varphi)^2}\\&+\frac{2}{(6\mathrm{sen}\varphi\mathrm{sen}\theta+2\mathrm{sen}\varphi\cos\theta+2\mathrm{sen}\theta\cos\varphi-4\cos\theta\cos\varphi}=0\end{aligned}\right\}\ldots(3)$$

sotto la condizione

$$3\mathrm{sen}^2\theta+2\mathrm{sen}\theta\cos\theta-2\cos^2\theta=0\ \ldots\ (4),$$

$$3\mathrm{sen}^2\varphi+2\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi+2\cos^2\varphi\ \ldots\ (5).$$

L' equazione (4) componendosi delle quantità $\mathrm{sen}\theta$, e $\cos\theta$ come la (5) si compone delle altre $\mathrm{sen}\varphi$, e $\cos\varphi$, basterà scioglierne una per avere gli angoli φ, e θ. Quindi se la (4), si dividerà per $\cos^2\theta$, di accordo colla quantità

$$-\frac{B\pm\sqrt{[B^2-4AC]}}{2A},$$

coefficiente di x nell' equazione degli asintoti (1'') darà

$$\tang\theta=\frac{-1+\sqrt{7}}{3},$$

e poicchè tangφ, e tangθ debbono essere affetti da segno contrario per la diversità de' segni di senφ, e senθ, possiamo stabilire senφ negativo, ed allora si avrà

$$\tang\theta=\frac{-1+\sqrt{7}}{3},$$

e
$$\tang\varphi=\frac{-1-\sqrt{7}}{3}.$$

Quindi si rilevino i valori di

$$\text{sen}(x,y'),\ \cos(x,y');$$

e di

$$\text{sen}(x,x'),\ \cos(x,x'),$$

rispettivamente in funzione di

$$\tang(x,y'),\ \tang(x,x');$$

si avrà

$$\text{sen}(x,y')=\frac{\tang(x,y')}{\sqrt{[1+\tang^2(x,y')]}}(165)=\frac{-1+\sqrt{7}}{\sqrt{[17-2\sqrt{7}]}},$$

$$\cos(x,y')=\frac{1}{\sqrt{[1+\tang^2(x,y')]}}=\frac{3}{\sqrt{[17-2\sqrt{7}]}}$$

$$\text{sen}(x,x')=\frac{\tang(x,x')}{\sqrt{1+\tang^2(x,x')]}}=\frac{-1+\sqrt{7}}{\sqrt{[17+2\sqrt{7}]}}$$

$$\cos(x,x') = \frac{1}{\sqrt{[1+\text{tang}^2(x,x')]}} = \frac{3}{\sqrt{[17+2\sqrt{7}]}}.$$

Si sostituiscono questi valori nell' equazione [3], si avrà

$$\left(\frac{y'+252(3\sqrt{[17-2\sqrt{7}]}+\sqrt{[119-14\sqrt{7}]})}{7056}\right)$$
$$\left(\frac{x'+252(3\sqrt{[17+2\sqrt{7}]}-\sqrt{[119+14\sqrt{7}]})}{7056}\right)$$
$$-\frac{186}{7056}=0,$$

e sarà questa l' equazione dell' iperbole [1] tra gli asintoti

L' equazione (1''') ci dà poi quella degli asintoti di [1], colla sostituzione de' coefficienti numerici 3, 2 ec. in luogo di A, B, ec. Fattane la sostituzione, l' equazione di queste rette sarà

$$y=\frac{1+\sqrt{7}}{3}-\frac{5}{14},$$

ed

$$y=\frac{-1-\sqrt{7}}{3}-\frac{23}{14},$$

che si potranno agevolmente costruire su' primitivi assi coordinati.

504. Sia l' equazione

$$y^2-2xy-x^2+2=0 \quad . \; . \; : (g),$$

la quale appartiene all' iperbole, e che voglia trasformarsi in quella della medesima curva, ma rapportata agli asintoti; si avrà

$A=1\,;\ B=-2\,;\ C=-1\,;\ F=2\,;\ D=0\,;\ E=0\,;$

quindi sostituendone i valori nell'equazioni ($1'''$) ed (n'), la prima diverrà

$$y=(1\pm\sqrt{2})x\,,$$

che sarà l'equazione degli asintoti appartenenti all'iperbole dell'equazione (g), e l'altra

$$xy-\frac{2\sqrt{128}}{32}=0\,,$$

che ridotta da

$$xy-\frac{1}{\sqrt{2}}=0\,,$$

e sarà questa l'equazione dell'iperbole (g), ma rapportata agli asintoti.

305. Sia l'equazione

$$Ay^2-C^2x^2+F=0\,,$$

sarà

$$B=0,\ E=0,\ D=0\,;$$

con tali valori de' coefficienti indeterminati, l'equazione ($1'''$) diverrà

$$y=\pm\sqrt{\left[\frac{C}{A}\right]}=\pm\frac{b}{a}x. \quad . \quad . \quad (b)$$

identica a quella, che abbiamo trovato al di sopra [67, (h)]; e l'altra (n') si trasformerà in

$$xy=\frac{(A+C)F}{4AC}=\frac{a^2+b^2}{4}=\frac{e^2}{4}.$$

Questi modelli bastano per dilucidazione delle teorie esposte; ritorniamo al punto, ove

abbiamo abbandonata la n.[a] analisi per renderla chiara con degli esempii.

306. E sulle prime sviluppiamo le conseguenze cui ci manuduce l' equazione dell' iperbole tra gli asintoti rilevata al disopra (296, 300, 305),

$$xy = \frac{a^2+b^2}{4} = \frac{e^2}{4} \ldots (\text{H}).$$

1.° Se l' iperbole è parilatera, si avrà

$$xy = \frac{a^2}{2} = \frac{e^2}{4};$$

cioè *la potenza dell' iperbole parilatera è la metà del quadrato di uno de' semiassi.*

2.° Per mezzo dell' equazione (H) possiamo agevolmente costruire iperbole, cui ess'appartiene nel seguente modo: si paragoni l' equazione (H) alla generale (1), e fatto il confrondo de' coefficienti, si rilevino i valori degli assi, con sostituire i coefficienti già determinati nell' espressioni (S), e (T) (85), e con questi assi si costruirà la curva, come abbiamo fatto (87)(*a*).

3.° *Nell' iperbole tragli asintoti il prodotto di due coordinate prese sugli asintoti è costante, cioè eguale alla potenza dell' iperbole.*

307. Meniamo le rette BA, BA' tra vertici

Tav. III Fig. 29

(a) I valori degli assi potrebbero ancora determinarsi agevolmente, cognito l' angolo dagl' asintoti coll' asse delle ascisse: chiamando α quest' angolo, sarà $a = e \tan \alpha$, e $b = e \cot \alpha$

Potrebbe ancora eseguirsi l' indicata costruzione, trasformando l' equazione (H) in quella rapportata agli assi rettangolari, come abbiamo fatto (76 pag. 74), ed indi rilevando i valori de' semiassi facendo successivamente $x = 0$, $y = 0$.

B,A, A'; essendo PB, AC eguali, e paralle-le, come ancora le altre due rette BP', CA'; saranno ancora eguali, e parallele le rette

$$PC, BA'; P'C, BA:$$

ma è

$$CP=CP';$$

dunque sarà

$$AB=CP, A'B=CP'.$$

ed eguali saranno ancora le rette

$$CE, EB, Ce, eB, EA, eA',$$

come metà di grandezza eguali; dunque la figura $CEBe$ sarà un rombo, e si avrà

$$CE.EB=CE'.EA=EB^2=EA^2;$$

ma per quel che abbiamo dimostrato è

$$CE.EB=\frac{a^2+b^2}{4}=x'y'(306,3.°),$$

sicchè sarà infine

$$x'y'=EB^2=EA^2;$$

ed

$$x'y'\text{sen}(x',y')=EB^2\text{sen}(x',y')=EA^2\text{sen}(x',y').$$

Dunque questo rombo $BECe$ è in disegno la potenza dell' iperbole tra gli asintoti.

308. Essendo

$$BE^2\text{sen}(x',y')=EA^2\text{sen}(x',y'),$$

ne segue *che le iperboli opposte, e le conjugate hanno la stessa potenza.*

Fig. 36 309. Quindi chiamando x un ascissa Ci presa sull' asintoto CY, ed y, y' le ordinate corrispondenti it, it' alle iperboli BH, $A'Q$, ed

indicando con P^2 la potenza dell' iperbole, si avrà

$$xy=P^2 \; ; \; xy'=P^2 \, ,$$

e per conseguenza $xy=xy'$, da cui si tira $y=y'$; cioè *se tra due iperboli conjugate si mena una parallela ad uno degli asintoti, questa resterà bisegata dall' altro asintoto.*

310. Passiamo a ritrovar l' equazione della tangente iperbolica rispetto agli asintoti (*a*). Sia

$$y-y'=A(x-x') \; . \; . \; . \; (1) \, ,$$

l' equazione della tangente, e per conseguenza x', y' le coordinate al punto di contatto;

$$xy=H \; . \; . \; . \; (2) \, ,$$

ed

$$x'y'=H \; . \; . \; . \; (3) \, ;$$

esprimano rispettivamente l' equazione dell'iperbole tra gli asintoti tra le coordinate variabili, e quelle al punto di contatto: da (2) sottragasi (3), si avrà

$$xy-x'y'=0 \, ,$$

equazione, che possiamo mettere sotto la forma

$$xy-y'x+y'x-x'y'=0 \, ,$$

ossia

$$x(y-y')+y'(x-x')=0 \; . \; . \; . \; (4)$$

(a) Siccome questa ricerca ci conduce a delle altre proprietà dell' iperbole tra gli asintoti, perciò, per esaminare in questo capo tutta la teoria degli asintoti, noi abbiamo creduto necessario scegliere isolatamente questo problema, che poi faremo vedere essere un caso particolare del problema generale delle tangenti alle linee di secondo grado, di cui ci occuperemo in appresso.

eliminando y tra (1), e (4), si avrà

$$(Ax+y')(x-x')=0 \; . \; . \; . \; (5).$$

I due valori di x, che si tirano da questa equazione sono quelli delle ascisse corrispondenti a' punti comuni alla segante, ed alla curva: quindi fatto

$$x=x', \text{ ossia } x-x'=0,$$

le due ascisse dell' equazione (5) si anderanno a confondere con quelle al punto di contatto, e la segante diverrà tangente: allora l' equazione (5) diverrà

$$Ax'+y'=0,$$

da cui si tira

$$A=-\frac{y'}{x'},$$

e l' equazione (1) diverrà

$$y-y'=-\frac{y'}{x'}(x-x') \; . \; . \; . \; (6).$$

311. Per menare graficamente la tangente all' iperbole, dietro l' equazione (6), basterà determinare l' angolo, ch' essa fa coll' asintoto delle ascisse, o delle ordinate (a), il che ci è dato, per esserci nota la quantità $-\frac{y'}{x'}$; indi inclinare al primo, o all' altro asintoto rispettivamente una retta sotto il dato angolo, e dal punto di contatto menare una parallela a questa

---

(a) Essendoci noto l' angolo asintotico, che in questo caso è quello delle due coordinate, basta determinare un solo di questi angoli, giacchè l' altro ci sarà geom. 76, 5.°

retta, che sarà la tangente richiesta, giacchè verifica l' equazione (6).

312. Se nell' equazione (6) si faccia successivamente

$$y=0,\ x=0;$$

si avrà nel primo caso

$$x=2x';$$

e nel secondo

$$y=2y'.$$

Sia CL l'asintoto delle x, e CY quello delle Tav. III Fig. 3 y; sarà

$$CL=2x'=2CN,$$

e

$$CE=2y'=2NM;$$

e quindi riguardo agli asintoti resterà anche costruita la tangente iperbolica, dietro la sua equazione, segnando su di essi i limiti, per i quali essa dee passare, che sono i punti rispettivamente distanti del centro per la doppia ascissa, e la doppia ordinata al punto di contatto, e congiungendo questi con una retta, che sarà la tangente richiesta.

313. La quantità LN chiamasi *suttangente*; quindi essendo

$$LN=CL-CN,$$

sarà

$$LN=x';$$

cioè *la sottangente nell' iperbole tra gli asintoti è eguale all' ascissa corrispondente al punto di contatto*.

314. Quindi, 1.° allorchè da un punto M si vuol menare una tangente all' iperbole tra gli asintoti, basterà ordinare la MN; tagliare

$$KL=CN,$$

e menare tra' punti L, ed M la retta MD, che sarà la tangente richiesta, il che è chiaro.

2.° Essendo

$$\frac{LN}{NC}=\frac{LM}{MI},$$

sarà ancora

$$LM=MI;$$

cioè la *tangente iperbolica intercetta tra' due asintoti è anche divisa per metà al punto di contatto.*

314 Segue da ciò, che se da un punto Y di un asintoto LY si menino alle due iperboli conjugate le tangenti Ye, Ye', poicchè è

$$\frac{Yt}{te}=\frac{Yt'}{te'},$$

sarà tt' parallela all' altro asintoto CL; cioè *la retta, che unisce i punti di contatto delle tangenti menate da uno stesso punto di un asintoto alle due iperboli conjugate, riesce parallela all' altro asintoto*; oltre acciò essa è *bisegata dal primo asintoto* (515).

309. L' equazione (6) ci fornisce benanche il mezzo, come poter menare una tangente all' iperbole rapportata gli asintoti da un punto fuori della curva. Sia dato questo punto per mezzo delle coordinate x', y' note; il punto ignoto di contatto sulla curva si dinoti colla coordinate variabili x, y; ambidue questi punti dovendosi trovare sulla tangente, le coordinate x', y'; x, y verificano l' equazione (6); e dippiù il punto x, y, essendo sulla curva, veri-

fica l' equazione $xy=H$: tra questa equazione, e quella della tangente posta sotto la forma

$$x'y+y'x=2x'y',$$

si elimini una delle variabili p. e. y, si avrà

$$x^2-2x'x+\frac{x'H}{y'}=0,$$

la quale sciolta da

$$x=x'\pm\sqrt{\left[x'\frac{x'y'-H}{y'}\right]}$$

valore reale, finchè si ha

$$x'y'-H=0,$$

o pure

$$x'y'-H>0,$$

e che diviene imaginario se si ha

$$x'y'-H<0;$$

nel 1.º caso è $x=x'$, e 'l punto $(x'y')$ si trove sulla curva, ciocchè riguarda il problema da noi sciolto (310); nel secondo caso i due valori di x indicano, che da un punto fuori della curva si possono menare due tangenti; e nel 3.º il punto (x',y') cade dentro lo spazio infinito della curva, e 'l problema si rende impossibile.

316. Meniamo ad un punto K dell'iperbole tra gli asintoti una tangente KF, e si prolunghi fino all'incontro dell'asintoto CX, e dal punto K si meni il semidiametro KC; chiamiamo x', y' le coordinate CO, OK al punto di contatto; essendo $CO=OF$(315), chiamaremo $OF=x'$, e l'angolo asintotico l' indicaremo col simbolo

Tav. III Fig. 2

ang(x',y'). Ciò posto, poichè le coordinate del punto C sono x', o, e le altre al punto K, y', o; si avrà (35)

$$CK^2=y'^2+x'^2\pm 2x'y'\cos(x',y')$$

$$KF^2=y'^2+x'^2\mp 2x'y'\cos(x',y'),$$

e quindi

$$CK^2-KF^2=4x'y'\cos(x',y') \quad . \quad . \quad . \quad (S).$$

Or chiamando ang(x,x') l'angolo degli asintoti coll'asse delle ascisse, poichè si ha

$$\text{ang}(x',y')=2\,\text{ang}(x,x'),$$

ed è dippiù

$$\text{tang}(x,x')=\frac{b}{a},$$

si ha

$$\text{sen}(x,x')=\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

e

$$\cos(x,x')=\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}};$$

quindi si avrà

$$\cos(x',y')=\cos^2(x,x')-\text{sen}^2(x,x')=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2};$$

dippiù l'equazione della curva al punto (x',y') è

$$4x'y'=a^2+b^2;$$

sicchè con questi valori di $\cos(x',y')$, e di $4x'y'$ l'equazione (S) si cambierà in

$$CK^2-KF^2=a^2-b^2;$$

questa equazione reggendo solamente tra' diametri conjugati (253), ne segue, che un *diame-*

tro qualunque, e la tangente condotta pe 'l suo vertice, e prolungata fino all' incontro degli asintoti sono conjugati.

317. Quindi chiamando CK, a', e KF, b', l' equazione dell' asintoto CX rispetto a questi diametri sarà

$$y = \frac{b'}{a'}x';$$

dal che ne segue, *che gli asintoti sono il luogo geometrico dell' equazioni*

$$y = \frac{b'}{a'}x;$$

allorchè $2b'$, e $2a'$ sono due diametri conjugati.

318. Dunque sapendo (prec.), che TS, ST', e Tav. IV i loro eguali $S'T''$, $S'T$ sono due diametri conjugati, Fig. 10 la figura $ST'S'T'$ sarà il parallelogrammo di due diametri conjugati, dal che ne segue *che gli asintoti di un' iperbole sono le diagonali di qualunque parallelogrammo iscritto nella iperboli opposte, e conjugate* (256). Così gli a- Tav. III sintoti dell' iperbole sono le diagonali CP, Fig. 19 CP' del rettangolo degli assi, ossia le diagonali SS', TT' del parallelogrammo $ST'S'T$.

319. Segue da ciò, che *dati due diametri conjugati qualunque in una iperbole, se con questi si formerà il parallelogrammo iscritto nelle iperboli opposte, e conjugate, resteranno graficamente determinati gli asintoti, con menare le diagonali a quelli parallelogrammi.* Tav. IV Fig. 10

320. Uniamo i punti di contatto R, e Q delle due tangenti SR, SQ, sarà QR parallela ad

AX, per esser identico il rapporto delle coordite

$$AR, RT; RA, AQ,$$

e per la stessa ragione $Q'R$ parallela ad AS, dal che ne segue, che *dati due diametri conjugati gli asintoti resteranno ancora determinati graficamente in un iperbole, unendo gli estremi Q, e Q' di uno di esso collo stesso estremo R dell' altro, e menando pal centro le parallele a queste congiungenti.*

321. Meniamo parallelamente all' asintoto XX' una retta RQ tra le due iperboli conjugate, ed uniamo i punti R, e Q col centro. Essendo $RF=FQ$ (509), le coordinate al punto R prese sugli asintoti saranno AF, FR, e le altre al punto

$$Q, AF, FQ:$$

quindi, chiamando x', y', queste coordinate, si otterrà, come sopra (516)

$$AR^2=x'^2+y'^2\pm 2x'y'\cos(x',y')$$

ed

$$AQ^2=x'^2+y'^2\mp 2x'y'\cos(x',y') \text{ (a)},$$

e quindi si otterrà parimente

$$AR^2-AQ^2=a^2-b^2,$$

cioè i due semidiametri AR, AQ sono conjugati; dal che ne segue, *che se tra le due iperboli conjugate si meni una retta parallela ad uno*

(a) L' Alunno Sig. Scarambone ha sciolto egualmente questo problema, rilevando le medesime formole col teorema (56) della trigonometria, e sviluppando il testo nello stesso modo che noi abbiamo qui fatto.

degli asintoti, i diametri menati pe' punti, ove questa incontra le due iperboli saranno conjugati.

322. Quindi possiamo sciogliere il problema inverso a quello del n.° (319, 320); cioè *dati gli asintoti, menare col mezzo di essi due diametri conjugati*. Per ciò eseguire, si meni RQ a piacere, ma parallela all' asintoto AX; e da' punti Q, ed R si menino due diametri; saranno questi conjugati, il che è chiaro.

Tav. IV Fig. 10

323. Meniamo nell' iperbole un' ordinata qualunque MN, e prolunghiamola, finchè incontra dall' una, e l' altra parte gli asintoti; chiamando $2a'$ il diametro, cui appartiene l' ordinata MN, e $2b'$ il suo conjugato, l' equazione dell' asintoto CY sarà

Tav. III Fig. 37

$$y = \frac{b'}{a'} x,$$

in cui $\frac{b'}{a'}$ indica il rapporto de' seni degli angoli che la retta Cy fa cogl' assi delle coordinate: quindi si avrà

$$RP = \frac{b'}{a'} x;$$

ma e,

$$RM = \frac{b'}{a'} x \sqrt{\left[1 - \frac{a'^2}{x'^2}\right]} \text{ (equaz. all' ip.)};$$

sicchè sarà

$$MP = \frac{b'}{a'} \left(\frac{a'^2}{2x} + \frac{a'^4}{8x^3} + \text{ec.} \right):$$

per la stessa ragione, riflettendo, che RQ, RN

sono presi in parte opposta ad RP, RM, sarà

$$QN = -\frac{b'}{a'}\left(\frac{a'^2}{2x}+\frac{a'^4}{8x^3}+\text{ec.}\right);$$

dunque sarà

$$NQ=MP;$$

e potendosi lo stesso dimostrare per un' altra ordinata qualunque, che si mena all' iperbole, e si prolunga fino all' incontro degli asintoti, ne segue, che *se si meni un' ordinata comunque all' iperbole, la quale si prolunghi fino all' incontro degli asintoti, le porzioni intercette fra la curva, e gli asintoti saranno eguali fra loro.*

424. Quindi poicchè è

$$NQ=MP,$$

aggiuntavi NM di comune, sarà

$$QM=NP,$$

e per conseguenza si avrà

Fig. 37

$$QM.MP=QN.NP.$$

Or essendo

$$MP=\frac{b'}{a'}\left(x-\sqrt{(x^2-a'^2)}\right),$$

ed

$$MQ=\frac{b'}{a'}\left(x+\sqrt{(x^2-a'^2)}\right),$$

sarà

$$PM.MQ=PN.NQ=b'^2.$$

Similmente si dimostrerà

$$HK.KH'=H'K'.K'H=a'^2.$$

Da ciò ne conchiuderemo, che *se ad un diametro qualunque si meni un' ordinata, la quale si prolunghi finchè incontra d'ambe le parti gli asintoti, il rettangolo delle porzioni intercette fra la curva, e gli asintoti sarà eguale al quadrato del semidiametro conjugato a quello, cui si è condotta l' ordinata.*

Quindi ordinata una retta all' asse $2a$, e prolungata fino all' incontro degli asintoti, il rettangolo delle parti intercette fra l' asintoto e la curva sarà eguale a b^2, e se l' ordinata è all' asse $2b$, un tal rettangolo sarà eguale ad a^2.

325. Dall' essere sempre $NQ=MP$, noi possiamo facilmente descrivere per assegnazione di punti un iperbole, di cui ci è data l' equazione rispetto agli asintoti. Sia $xy=H$ una tale equazione: si determinino gli assi, e quindi gli asintoti (319, 370); indi dati ad x diversi valori, si determinino i corrispondenti valori di y; si conosceranno allora tanti punti M della curva: si menino per questi punti delle rette HQ a piacere, che si prolungheranno, finchè incontrano dall' una e l' altra parte gli asintoti; indi tagliando sempre $NQ=MP$, i punti N al par de' punti M apparterranno alla curva, che si domanda.

326. Supponiamo, che una delle seganti limitata tra gli asintoti divenga tangente in un punto; sarà $MC=ML$, e quindi, prese le coordinate CN, NM al punto M di contatto, sarà ancora $CN=NP'$: chiamiamo x', y' le coordinate CN, NM, e CL', x; si avrà

$$x=2x'=\frac{2x'y'}{y'}=\frac{x'y'+x'y'}{y'},$$

da cui si tira

$$-y'=-\frac{y'}{x'}(x-x');$$

ma avendo noi preso $x=CL'$, a questo punto si ha $y'=0$; dunque prendendo per x un ascissa variabile; allora non sarà $y=0$, e l' equazione

$$-y'=-\frac{y'}{x'}(x-x')$$

diverrà

$$y-y'=-\frac{y'}{x'}(x-x'),$$

ch' è l' equazione, come sopra, alla tangente menata all' iperbole rapportata agli asintoti da un punto preso sul perimetro.

527. Conchiudiamo la teoria degli asintoti col problema. *Data l' equazione di un' iperbole rapportata a' diametri conjugati obbliqui, ritrovare quella della stessa curva, ma rapportata agli asintoti.*

Sia (251) l' equazione dell' iperbole

$$a'^2y^2-b'^2x^2=-a'^2b'^2 \ldots (P).$$

Si trasformi questa equazione in un altro sistema parimente obbliquo mercè le note formole [(50), 1]

$$x=\frac{x'\text{sen}(x',y)+y'\text{sen}(y',y)}{\text{sen}(x,y)},$$

$$y=\frac{x'\text{sen}(x',x)+y'\text{sen}(y',x)}{\text{sen}(x,y)}.$$

nelle quali ang(x,y) fissa l' inclinazione de' diametri conjugati: eseguita la trasformazione, ed ordinata per y', ed x', si avrà

$$\frac{1}{\text{sen}^2(x,y)}[a'^2\text{sen}^2(y',x)-b'^2\text{sen}^2(y',y)]y'^2+$$

$$\frac{1}{\text{sen}^2(x,y)}[a'^2\text{sen}^2(x',x)-b'^2\text{sen}^2(x',y)]x'^2$$

$$+\frac{2}{\text{sen}^2(x,y)}[a'^2\text{sen}(x',x)\text{sen}(y',x)-b'^2\text{sen}(y',y)\text{sen}(x',y)]x'y'$$

$$=-a'^2b'^2 \quad \ldots \quad (K).$$

Quindi per la condizione degli asintoti si avrà

$$a'^2\text{sen}^2(y',x)-b'^2\text{sen}^2(y',y)=0$$

$$a'^2\text{sen}^2(x',x)-b'^2\text{sen}^2(x',y)=0,$$

e queste due equazioni danno

$$\frac{\text{sen}(y',x)}{\text{sen}(y',y)}=\pm\frac{b'}{a'},$$

e

$$\frac{\text{sen}(x',x)}{\text{sen}(x',y)}=\pm\frac{b'}{a'},$$

come dovea esserlo (317). L' equazione (K), diverrà dietro queste condizioni

$$\frac{2}{\text{sen}^2(x,y)}[a'^2\text{sen}(x',x)\text{sen}(y',x)-b'^2\text{sen}(x',y)\text{sen}(y',y)]x'y'$$

$$=-a'^2b'^2 \quad \ldots \quad (K').$$

Sia

Tav. IV Fig. 10

$$AR=a', \; RS=b', \; RAS=\text{ang}(x',x),$$

$$RSA = \text{ang}(x', y) ;$$

sarà

$$AS = \sqrt{(a'^2 + b'^2 + 2a'b'\cos(x', y)} \quad (35) ;$$

quindi si avrà

$$\text{sen}(x', x) = \frac{b'\text{sen}(x, y)}{\sqrt{[a'^2 + b'^2 2a'b'\cos(x, y)]}} , (a)$$

e $$\text{sen}(x', y) = \frac{a'\text{sen}(x, y)}{\sqrt{[a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos(x, y)]}} .$$

Similmente avendo riguardo alla posizione dell' altro asintoto rispetto al primo si avrà

$$\text{sen}(y', x) = \frac{-b'\text{sen}(x, y)}{\sqrt{[a'^2 + b'^2 + 2a'b'\cos(x, y)]}} ,$$

e $$\text{sen}(y', y) = \frac{+a'\text{sen}(x, y)}{\sqrt{[a'^2 + b'^2 - 2a'b\cos(x, y)]}} .$$

Questi valori si sostituiscono nell' equazione (K), riducendo l' espressione

$$2a'^2b'^2 - 4a'^2b'^2\cos^2(x, y)$$

sotto la forma

$$2a'^2b'^2[1 - 2\cos^2(x, y)] ,$$

e riflettendo, che si ha

$$-\cos 2(x, y) = \text{sen}^2(x, y) - \cos^2(x, y) = 1 - 2\cos^2(x, y) ,$$

si avrà per ultima trasformata

$$\frac{2}{\text{sen}^2(x, y)} \left[\frac{-a'^2b'^2\text{sen}^2(x, y)}{\sqrt{[a'^4 + b'^4 - 2a'^2b'^2\cos 2(x, y)]}} \right.$$

(a) L' angolo (x, y) è l' angolo $ARS = \text{ang}(a', b')$.

$$\left.\frac{-a'^2b'^2\text{sen}^2(x,y)}{\sqrt{[a'^4+b'^4-2a'^2b'^2\cos 2(x,y)]}}\right]x'y'=-a'^2b'^2,$$

la quale ridotta da

$$x'y'=\frac{\sqrt{[a'^4+b'^4-2a'^2b'^2\cos 2(x,y)]}}{4}\ldots(M).$$

Bisogna osservare, che l'equazione dell'iperbole tra gli asintoti rispetto agli assi (305) non è, che un caso particolare di questa, giacchè se l'angolo (x,y) è retto, si ha

$$\cos(x,y)=0,$$

e l'equazione (M) diverrà

$$x'y'=\frac{a'^2+b'^2}{4}.$$

Allorchè l'equazione è derivata da un equazione generale mancante di qualche coefficiente, bisogna aver conto di tutto questo nel prendere i valori di a', e b' (pag. 218). Così se data l'equazione

$$3y^2+2xy-5x^2+3x+1=0,$$

si voglia rapportarla agli asintoti per mezzo de' diametri conjugati sotto un dato angolo ψ, si determinerà colle tavole il seno di quest'angolo, e poi l'equazione (M), e l'altra

$$y'=\frac{b'}{a'}x',$$

si ridurranno mercè i valori di a', e b' (pag 218), facendo in essi $E=0$; la prima equazione ridotta sarà quella dell'iperbole tra gli asintoti rapportati a' diametri conjugati sotto l'angolo ψ,

e la seconda quella degli asintoti, prendendo le coordinate su' stessi diametri.

Se si vuole sciogliere l' inverso del problema (327), non si dee fare, che trasformare l' equazione (M) in altra tra coordinate oblique, e rilevare, mercè la condizione de' diametri conjugati, i valori di questi, e l' equazione dell' iperbole ad essi rapportata. Che se per mezzo dell' equazione (M) si volesse ottenere quella dell' iperbole rapportata agl' assi, si dovrebbe trasformare la (M) in altra tra le coordinate rettangolari per mezzo delle formole (50, V), e rilevare la trasformata richiesta, e 'l valore degli assi.

328. Quindi sapendo costruire l'iperbole, dati due diametri conjugati, o gli assi, possiamo per mezzo dell'equazione (M) costruire la curva. Noi lasciamo gli allievi queste applicazione tanto facili a chi voglia eseguirle co' metodi moderni.

Parabola.

329. L' equazione della parabola avuta dalla discussione generale è $x^2=py$. Se questa equazione si paragoni a quella dell' ellisse rapportata al vertice, ed al parametro, cioè ad

$$y^2=\frac{p}{2a}(2ax-x^2)=px-\frac{p}{2a}x^2=0\;;$$

si comprenderà, che questa seconda diverrà identica alla prima, allorchè si ha

$$\frac{p}{2a}x^2=0\;;$$

quindi se noi supponiamo $2a=\infty$, la quantità $\frac{p}{2a}x^2$ come infinitesima sarà trascurabile rispetto a px, e l' equazione dell' ellisse si cambierà in quella della parabola. Per dimostrarlo direttamente, chiamiamo c la distanza del vertice dal fuoco dell' ellisse, si avrà

$$c=a-\sqrt{(a^2-b^2)}\,,$$

e quindi

$$c-a=\sqrt{(a^2-\frac{ap}{2})}\;:$$

elevando a quadrato, ed ordinando rispetto ad a, dopo di aver ridotto, si avrà

$$a=\frac{c^2}{2c-\frac{p}{2}}\,,$$

valore, che sostituito nell' equazione all' ellisse

$$y^2=px-\frac{p}{2a}x^2,$$

la trasforma in quest' altra

$$y^2=px-\frac{p}{2}\left(\frac{2c-\frac{p}{2}}{c^2}\right)x^2 \ldots (S),$$

or essendo

$$a=\frac{c^2}{2c-\frac{p}{2}},$$

a supposizione di $a=\infty$ port' all' equazione

$$2c-\frac{p}{2}=0:$$

ma in tal caso l' equazione (S) diviene

$$y^2=px;$$

dunque *l' ellisse si cambia in parabola supponendo infinito l' asse primario.*

330. Dunque allorchè l' ellisse si trasforma in parabola, uno de' fuochi dell' ellisse va a perdersi all' infinito, e quindi il raggio vettore corrispondente a questo fuoco diverrà parallelo all' asse.

Dippiù la quantità p da noi sostituita al coefficiente dell' ascissa nell' equazione generale rappresenta il parametro della parabola.

331. Segue da ciò, ch' essendo $y^2=px$ l' equazione della parabola, questa curva ha la proprietà *di avere il quadrato di una qualunque*

semiordinata eguale al rettangolo dell' ascissa nel parametro.

E dimostrandosi lo stesso per due altre coordinate x', y'; ne conchiuderemo, che *nella parabola i quadrati delle semiordinate sono fra loro come le corrispondenti ascisse.*

332. Essendo una semiordinata alla parabola media proporzionale tra 'l parametro; e l' ascissa corrispondente, ne segue che se sopra una retta PD divisa comunque in A descriviamo un cerchio, cui dal punto A ordiniamo la BB', questa sarà parimente l' ordinata, che si mena dal punto D alla parabola, che ha per vertice A e per parametro AP. Tav. III Fig. 48

333. L' equazione

$$2c-\frac{p}{2}=0,$$

è l' equazione di condizione, perchè l' equazione dell' ellisse si cambj in quella della parabola: essa ci da $c=\frac{p}{4}$; cioè *nella parabola la distanza del vertice dal fuoco è eguale alla quarta parte del parametro*; e per conseguenza *il parametro di ogni parabola è eguale alla quadrupla distanza del vertice dal fuoco.*

334. Si prolunghi l' asse delle ascisse al di là del punto A verso P, e si tagli Fig. 38

$$AS=AF=\frac{1}{4}p,$$

e dal punto S si meni su di SP la perpendicolare SR. Questa retta distante dal vertice per

la quarta parte del parametro si chiama *direttrice*.

Si meni dal fuoco F ad un punto qualunque Q del perimetro parabolico una retta FQ, e dal punto Q si meni la semiordinata QE: sarà

$$FQ^2=\left(x-\frac{p}{4}\right)^2+y^2=a^2-\frac{px}{2}+$$

$$\frac{p^2}{16}+px=x^2+\frac{px}{2}+\frac{p^2}{16};$$

e quindi

$$FQ=x+\frac{p}{4}=AE+AS=RQ;$$

e dimostrando similmente $Fq=qr$ ec., ne conchiuderemo, che *ogni punto del perimetro parabolico tanto dista dal fuoco, quanto dalla direttrice.*

335. Quindi, dato il parametro di una parabola, possiamo facilmente descriverla per assegnazione di punti nel seguente modo. Cioè da una retta PD, prendendo per vertice un punto A a piacere, si tagli

$$AS=AF=\frac{1}{4}p;$$

dipoi elevata da un punto E preso a piacere una perpendicolare QQ', col centro F, e col raggio SE si descriva un cerchio: i punti Q, Q', ove questo taglierà la retta QQ' apparterranno alla parabola richiesta, il cui vertice sarà A, e'l parametro $4AF$: infatti in virtù di questa costruzione si ha sempre

$$FQ'=ES=Q'R.$$

Se la parabola si vuol descrivere con moto organico: allora adattatta perpendicolarmente alla direttrice una riga RP, e disteso lungo di questa da R in P un filo, l'estremità R di questo filo si adatti al fuoco F, e mantenendolo ben teso con uno stiletto Q, si faccia la riga caminare parallalamente a se stessa; lo stiletto Q descriverà una parabola, poichè essendo sempre Fig.39

$$RP=FQP,$$

toltovi QP di comune, resterà

$$FQ=QR.$$

336. Chiamiamo R un raggio vettore menato dal fuoco della parabola ad un punto qualunque del suo perimetro, la proprietà dimostrata darà luogo all'equazione Fig.38

$$R=x+\frac{p}{4}:$$

supponiamo che una curva MAM' soddisfi a questa equazione; essendo

$$FQ'^2=FE^2+EQ^2,$$

sarà

$$\left(x+\frac{p}{4}\right)^2=\left(x-\frac{p}{4}\right)^2+y^2,$$

la quale sviluppata e ridotta da $y^2=px$, ch'è l'equazione alla parabola.

Noi abbiamo con ciò sciolto il problema di *ritrovare l'equazione di quella curva, che ha la proprietà di aver ogni punto del suo perimetro tanto lontano da un punto preso*

dentro di essa sul suo asse, chiamato fuoco, quanto lo è da una retta menata fuori della curva perpendicolarmente all' asse medesimo, e distante dal vertice, per quanto questo lo è dal fuoco.

537. Segue da ciò che l' equazione

$$R = x + \frac{p}{4},$$

è l' equazione caratteristica della parabola. Fissiamo l' origine delle coordinate al fuoco F; sarà, chiamando

$$FE, x', R = x' + \frac{p}{2}:$$

se ora si vuole avere la trasformata in coordinate polari, bisogna sostituire ad x' la quantità

$$R\cos(x', R);$$

con tal sostituzione, l' equazione

$$R = x' + \frac{p}{2},$$

diverrà

$$R = R\cos(x', R) + \frac{p}{2},$$

la quale da

$$R = \frac{\frac{p}{2}}{1 \mp \cos(x', R)};$$

ed è questa l' equazione polare della parabola: Il segno $-$ ha luogo, allorchè il punto E cade al di là di F, e 'l segno $+$, allorchè cade tra A, ed F.

CAPO XII.

Parabola rapportata a' diametri conjugati.

358. Facciamo nell' equazione della parabola

$$y^2=px,\ x=\cos(x,x')x'+\cos(y',x)y'+a,$$

e $$y=\text{sen}(x,x')x'+\text{sen}(y',x)y'+b,$$

che sono le formole per trasformare un sistema da coordinate rettangolari ad un obbliquo, che abbia un' origine diversa dal primo; si avrà, riunendo in un sol termine i coefficienti di x', ed y', ed eguagliando a zero

$$\text{sen}^2(x,x')x'^2+2\text{sen}(x,x')\text{sen}(x,y')x'y'+$$
$$\text{sen}^2(x,y')y'^2+b^2-pa+[2b\text{sen}(x,x')-p\cos(x,x')]x'+$$
$$[2b\text{sen}(x,y']-p\cos(x,y')]y'=0\ \ldots\ (\alpha).$$

Per ridurre quest' equazione sotto la forma

$$y^2=px,$$

ordinandola rispetto ad y', bisogna che si abbia

1.ª $\text{sen}(x,x')\text{sen}(x,y')=0$;

2.ª $\text{sen}^2(x,x')=0$;

3.ª $b^2-pa=0$;

4.ª $b\text{sen}(x,y')-p\cos(x,y')=0$;

ed allora la trasformata diverrà

$$y'^2=\frac{p}{\text{sen}^2(x,y')}x';$$

cioè

$$y'^2 = p'x',$$

facendo

$$\frac{p}{\mathrm{sen}^2(x, y')} = p'.$$

339. Segue da ciò, che **nella parabola il** parametro di un sistema qualunque di diametri conjugati X, Y, supponendo x, y quello degli assi rettangolari, e chiamando p il parametro principale è

$$\frac{p}{\mathrm{sen}^2(x, y)}.$$

340. Andiamo ora ad esaminare l'equazioni di condizione stabilite, per ridurre la trasformata (α) sotto la forma semplicissima

$$y'^2 = p'x'.$$

La 1.ª non è che una conseguenza della 2.ª, ed in altro non ne differisce, se non che la 1.ª più generalmente riguardo la curva rapportata o al diametro della x', o a quello delle y': esse annunziano una della proprietà essenziali che hanno i diametri della parabola, cioè essendo

$$\mathrm{sen}(x, x') = 0,$$

sarà ancora l'angolo

$$(x, x') = 0;$$

quindi poicchè la nuova origine si è trasportata in un punto diverso del vertice principale; ne segue che *nella parabola i diametri sono tutti paralleli all' asse, e quindi paralleli tra di loro*. Ecco la necessità di cambiare l'origine delle coordinate, giacchè altrimenti il sistema de' diametri conjugati obbliqui si confon-

derebbe con quello de' rettangolari, com' è facile il verificarlo, eseguendo la trasformazione indicata sulla stessa origine degli assi (*a*).

341 Questa proprietà interessante alla parabola potrebbe dimostrarsi direttamente nel seguente modo.

L' equazione generale delle linee di 2.° grado sciolta sotto la condizione

$$B^2-4AC=0,$$

da

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm$$

$$\frac{1}{2A}\sqrt{[2(BD-2AE)x+(D^2-4AF)]} \quad . \; . \; . \; (g),$$

e l' equazione di un diametro sarà

$$y=-\frac{Bx}{2A}-\frac{D}{2A} \quad . \; . \; . \; (i),$$

la stessa equazione generale sciolta rispetto ad x da

$$x=-\frac{By+E}{2C}\pm$$

$$\frac{1}{2C}\sqrt{[2(BE-2CD)y+(D^2-4CF)]} \quad . \; . \; . \; (h),$$

(a) Questo ha luogo parimente nelle altre curve, nelle quali, se nella trasformazione da un sistema di coordinate rettangolari ad un obbliquo non abbiamo cambiat' origine, ciò è derivato, perchè le trasformazioni le abbiamo eseguite sulle loro equazioni rapportate al centro, ch' è l' origine di tutt' i diametri.

e l' equazione dell' altro diametro sarà

$$x=-\frac{By}{2C}-\frac{E}{2C},$$

da cui si ha

$$y=-\frac{2C}{B}x-\frac{E}{B}\ .\ .\ .\ (f).$$

Ciò posto dividendo la condizione

$$B^2=4AC,$$

per $2AB$, si avrà

$$\frac{B}{2A}=\frac{2C}{B};$$

quindi colla sostituzione di un tal valore di $\frac{2C}{B}$ l' equazione $[f]$ diverrà

$$y=-\frac{B}{2A}x-\frac{E}{B},$$

la quale costruisce una retta parallela a quella dell' equazione

$$y=-\frac{B}{2A}x-\frac{D}{2A}.$$

Quindi i due diametri della parabola AX, AX' avuti immediatamente dalla discussione sono paralleli.

Tav. III Fig. 24. 342. La 3.ª equazione di condizione

$$b^2-pa=0,$$

è l' equazione della parabola nel punto, in cui la coordinate sono a, b, il che ci mostra, che

la nuova origine è parimente sul perimetro parabolico. Finalmente la 4.ª equazione di condizione ci da

$$\tang[y',x]=\frac{p}{2b}:$$

noi vedremo in seguito che $\frac{p}{2b}$ è la condizione perchè una retta sia tangente ad una parabola nel punto $[a,b]$: ne segue dunque che il diametro della y' è la tangente menata alla nuova origine; e che per conseguenza ogni diametro menato parallelamente all' asse, e la tangente condotta dal suo vertice sono due diametri obbliqui, che riducono l' equazione della parabola tra le coordinate obblique sotto la stessa forma dell' equazione alla stessa curva tra le coordinate rettangolari.

343. Per distinguere questi diametri dagli altri, che non hanno tale proprietà, noi diamo ad essi il nome di *diametri conjugati*.

Dunque sono *conjugati* due diametri, della parabola, quando l' equazione della curva, riguarda ad essi prende la forma

$$y^2=px.$$

Dippiù ogni diametro parallelo all' asse forma colla tangente, che si mena dal suo vertice un sistema di diametri conjugati.

344. Mettiamo quest' ultima equazione di condizione sotto la forma

$$\frac{\operatorname{sen}[y',x]}{\cos[y',x]}=\frac{p}{2b},$$

come ci viene immediatamente dal colcolo: elevando a quadrato e sostituendo

$$1-\text{sen}^2[y',x]\,,$$

in luogo di

$$\cos^2[y',x]\,,$$

si avrà

$$\text{sen}^2(y',x)=\frac{p^2}{4b^2+p^2}=\frac{p^2}{4ap+p^2}=\frac{p}{4a+p}:$$

or si ha

$$p'=\frac{p}{\text{sen}^2(y',x)}\;;$$

dunque sostituendo per

$$\text{sen}^2(y',x)\,,$$

il suo valore, e riducendo, si avrà

$$p'=4a+p=4\left(a+\frac{1}{4}p\right).$$

Tav III Fig 41 Ciò posto essendo

$$A'F=A'R=AG+AD=a+\frac{1}{4}p\,,$$

sarà

$$4A'F=4\left(a+\frac{1}{4}p\right)=p'\;;$$

dal che ne conchiuderemo, come nel sistema rettangolare, che *in un sistema qualunque di coordinate, il parametro di un diametro è eguale alla quadrupla distanza del suo vertice dal fuoco.*

345. Quindi 1.° *il quadrato di na semiordinata della parabola presa riguardo ad un*

diametro qualunque è eguale al rettangolo dell' ascissa corrispondente nel suo parametro ; 2.° I quadrati delle semiordinate ad uno stesso diametro sono come le ascisse corrispondenti.

346. Per determinare poi, menata nella parabola una corda a piacere QI, il diametro di essa; poichè l' equazione

$$y^2=p'x,$$

ci dimostra che ogni diametro divide per metà le sue ordinate, basterà condurre a piacere un' altra corda AB parallela a Qi, e divise queste corde Qi, AB per metà rispettivamente ne' punti m, n, si condurre questi punti la retta $A'mn$, che sarà il diametro richiesto.

347. Essendo l'equazione della parabola riguardo a' diametri conjugati della stessa forma che l' equazione riguardo alle coordinate rettangolari, ne segue, che noi possiamo facilmente descrivere una parabola per assegnazione di punti, dato il parametro, e l' angolo delle coordinate. Cioè si descriva con questo parametro la parabola $HA'K$, come si è insegnato al di sopra (335), e indi ordinate ad essa le rette nm, $n'm'$..., s' inclinino queste all' asse $A'X$ sotto l' angolo dato, come NM, $N'M'$..., gli estremi N, N', M, M' appartèrranno alla parabola richiesta. Infatti, essendo

$$Bn^2=A'B.p\,,\; B'n'^2=A'B'.p \text{ ec. };$$

sarà ancora

$$BN^2=A'B.p\,,\; B'N'^2=A'B'.p\,;$$

e perciò i punti N, N' appartengono alla parabola richiesta.

348. Veniamo a risolvere qualche problema interessante. *Data la posizione dell'asse di una parabola, e 'l parametro principale, si cerca determinare due diametri conjugati, che facciano un angolo dato.*

Chiamiamo x', y' le coordinate rettangolari al vertice del diametro, che si domanda; si avrà in primo luogo la relazione

$$y'^2=px'.$$

Dippiù l'angolo (x',y'), ossia l'angolo (x,y') (a) ci da un'altra relazione

$$\text{tang}(x',y')=\frac{p}{2y'},$$

la quale, poicchè, per le condizioni del problema è dato tanto

$$\text{tang}(x',y'),$$

quanto p, ci farà conoscere $2y'$: si sostituisca il valore di y' nell' equazione

$$y'^2=px',$$

e si renderà noto anche x': quindi resterà determinato l'origine de' due diametri conjugati, che si chiedeano.

Il problema corrispondente analitico più conforme a' metodi moderni è quello da noi risoluto (338.), con cui abbiamo rapportata a de' diametri obbliqui la parabola riguardo a' suoi assi.

349. Se questo problema si voglia sciogliere

(a) Essendo paralleli i diametri, su quali si prendono le x ed x', è chiaro, che sarà ang(x',y')=ang(x,y').

graficamente, basterà menare una corda qualunque AB inclinata all' asse AX sotto l' angolo dato: allora, divisa AB per metà nel punto n, da n si meni una retta $A'X$ parallela ad AA: la retta $A'X$; e la tangente al punto A' saranno i due diametri conjugati richiesti.

Fig. 41

350. *Data la posizione di un sistema di diametri conjugati, ritrovare quella degli assi.*

Sulle prime il parametro del dato sistema è noto. Si chiamino x, ed y le coordinate al vertice dell' asse prese sul dato sistema; e poicchè 1.° ciaschedun diametro parallelo all' asse colla rispettiva tangente condotta dal suo vertice, 2. forma un sistema di due diametri conjugati della parabola (343), ne segue, che la posizione del diametro conjugato all' asse, ossia della tangente al vertice di questo ci viene determinata dalla quantità $\frac{p'}{2y'}$, la quale indica il rapporto de' seni degli angoli della retta AP co' due diametri dati $A'X'$, $A'T$. Or essendo $A'X'$ parallelo all' asse, l' angolo di AP con $A'P'X'$ sarà retto. Dippiù essendo noto l' angolo $TA'R$ del dato sistema, sarà anche noto l' angolo AIT differenza dell' angolo retto, e dell' angolo TAR: quindi saranno noti gli angoli di AP co' diametri del dato sistema, e sarà nota per conseguenza la quantità $\frac{p'}{2y'}$: or p' è dato; dunque conosceremo ben anche y', e l' equazione

Fig. 41

$$y'^2=p'x',$$

in cui si conosce y', e p' ci farà anche cono-

scere x', e resteranno così determinate le coordinate $A'n$, nA al vertice dell' asse, e quindi la posizione degli assi.

Se questo problema si vuole sciogliere geometricamente, basterà elevare da A' una perpendicolare $A'A''$, dividerla per metà in G, e da G elevarci una perpendicolare AX, che sarà l' asse della curva, il che è chiaro.

331. Per dare a questa teoria tutta la generalità, di cui è capace, al par di ciocchè abbiamo al di sopra fatto riguardo all' ellisse, ed all' iperbole, noi andremo ad occuparci del seguente problema.

Ritrovare le formole per costruire la parabola di un equazione generale sopra due diametri conjugati inclinati sotto un angolo dato per mezzo della sua tangente $\downarrow$, e quindi rilevare l' equazione della parabola rispetto a detti diametri.

Egli è chiaro, che tutto si riduce 1.° a trasformare l' equazione generale in un sistema di coordinate obblique; 2.° a rilevare il seno, e coseno dell' angolo dato, combinando la condizione di fare svanire il coefficiente di xy con quella, che somministra l' ipotesi di dover i diametri conjugati avere un dato angolo; 3.° a far svanire la y^2, o x^2, e ciò per la natura della parabola, riuscendo zero o P', o Q' (70), 4.° finalmente a trasformare la risultante in un sistema di coordinate parallelo per determinare le coordinate alla nuova origine, colla condizione di far svanire o la quantità moltiplicata per y, o quella per x, secondocchè va a zero x^2, o pure y^2.

Colla 1.° operazione si otterrà la stessa

trasformata (τ.pag. 142) , alla quale bisogna solamente aggiugnere la quantità ,

$$[D\,\text{sen}(y',x)+E\cos(y',x)]y'$$
$$+[D\,\text{sen}(x',x)+E\cos(x',x)]x' ,$$

giacchè l' equazione (τ) è la trasformata dell' altra (2, pag. 141) , e questa dell' altra (1), in cui per mezzo de' valori delle coordinate al centro si sono mandati a zero i termini moltiplicati per y , ed x.

La 2.ª darà luogo alle condizioni (4, pag. 142), e (5, pag. 143) , per mezzo delle quali si otterranno le altre (6, e 7) , e queste per mezzo delle condizioni (8, 9, 10, 11, pag. 144) ci daranno la trasformata (τ', pag. 145), alla quale bisogna sempre aggiungere le quantità moltiplicate per x' , ed y' , e sostituire il coefficiente $-F$ dell' equazione generale alla quantità tutta nota : Questa infine ridotta colle condizioni (6, 7, pag. 143), e determinate parimenti le quantità

$$\text{sen}(y',x) , \cos(y',x), \text{sen}(x',x), \cos(x',x) ,$$

in funzione di

$$\text{tang}(y',x) , \text{ e } \text{tang}(x',x) ,$$

rispettivamente, ci darà la trasformata della forma

$$Q'y'^2+P'x'^2+R'y'+S'x'+K'=0 \quad . \; . \; . \; (X),$$

nella quale, sostituendo al seno dell' angolo dato per la sua tangente $\downarrow$, la quantità

$$\text{sen}(x',y') ,$$

i valori di Q' , e P' saranno quelli stessi tro-

vati pag. 156, R' simboleggerà la quantità

$$D\text{sen}(y',x)+E\cos(y',x),$$

calcolata in funzione di

$$\text{tang}(y',x),$$

dataci per mezzo dell' equazione (6, pag. 143);
S' esprimerà la quantità

$$D\text{sen}(x',x)+E\cos(x',x),$$

calcolata in funzione della sua tangente per mezzo dell' equazione (7, pag. 143), e sarà

$$K'=-F,$$

coefficiente dell' equazione generale.

Ciò posto, la condizione della parabola

$$B^2-4AC=0,$$

ci da

$$(C+A)^2=(C-A)^2+B^2 \quad (70),$$

ma è

$$(C-A)^2+B^2=(C+A)^2-4AC+B^2=$$
$$(C+A)^2-4\left(AC-\frac{B^2}{4}\right),$$

si avrà per conseguenza

$$(C+A)^2-(C+A)^2-4\left(AC-\frac{B^2}{4}\right)=0,$$

e quindi si avrà $Q'=0$, e la (X) diverrà

$$P'x'^2+R'y'+S'x'+K'=0 \quad . \; . \; . \; (X'),$$

simile altra (p') (71):

Finalmente inerendo alla 4.ª operazione l' equazione (X') si trasformi nell'altra (p'')(71),

mettendo solo gli apici a' coefficienti, e colle condizioni

$$2a'P'+S'=0,\quad P'a'^2+S'a'+B'b'+K'=0,$$

si determinino i valori di a', b' in funzione di

$$P',\ S',\ R',\ K',$$

e quindi in funzione de' loro valori; si avrà

$$a'=-\frac{S'}{2P'},$$

e $$b'=\frac{S'^2}{4R'P'}-\frac{K'}{R'},$$

e l' equazione richiesta sarà

$$x''+My''=0\ .\ .\ .\ (X'').$$

552. Dietro tutto ciò gli Allievi non dovranno, che determinare i valori di S', e R', come abbiamo indicato al di sopra, e sostituirli insieme col valore di P' nell' espressioni di a', e b'; ed infine sostituire i valori di

$$a',\ b',\ P',\ R',\ S',$$

nell' equazione

$$P'x''^2+(2a'P'+S')x''+R'y''+ \\ P'a'^2+S'a'+R'b'+K'=0;$$

otterranno in questo modo l' ultima trasformata (X'').

Noi lasciamo al loro esercizio questo facile sviluppo, e potranno esercitarsi sulle parabole dell' equazioni

$$1.^a\ y^2-2xy+x^2-2y-1=0,$$

$2.^a \quad 3y^2 - 6xy + 3x^2 + 2y + 5x - 7 = 0$

rapportando la prima a due diametri conjugati capaci di un angolo dato per la tangente 1, e la seconda ad un sistema di diametri conjugati capace di un angolo dato per la sua tangente $-\frac{5}{3}$. Il risultato della trasformazione sulla prima darà

$$a' = 1 \,, \; b' = 0 \,,$$

$$\text{sen}(y', x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \,, \; \cos(y', x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \,;$$

$$\text{sen}(x', x) = 1 \,, \; \cos(x', x) = 0 \,,$$

e l' equazione finale sarà

$$x'^2 = y' \sqrt{2}.$$

353. *Ritrovare la superficie di una porzione di parabola AED.*

Si prendono le ascisse eguali infinitamente vicine AB, BC, CD, e si conducano le semiordinate BL, CM ec.: considerando tutt'i spazietti (Fig. 44)

$$ALB \,, \; BLMC \,, \; CMED \,,$$

come tanti piccioli rettangoli, si avrà

$$ALB = AB \,.\, BL \,; \; BLMC = BC \,.\, CM \,;$$
$$CMED = CD \,.\, DE \text{ ec.} \,;$$

ma chiamando AB, x e p il parametro sarà

$$AC = 2x \,, \; AD = 3x \; \ldots \,;$$

e quindi si avrà

$$BL = \sqrt{px} \,; \; CM = \sqrt{p \,.\, 2x} \,, \; DE = \sqrt{p \,.\, 3x} \,;$$

dunque sostituendo questi valori, si avrà

$$ALB=x\sqrt{px}\,,\ BLMC=x\sqrt{2px}\,;$$

$$CMED=x\sqrt{3px}\,;$$

e quindi sarà

$$AED=x\sqrt{px}+x\sqrt{2px}+x\sqrt{3px}+\ldots\ldots+x\sqrt{p\chi}\,,$$

indicando con $p\chi$ il valore dell' ultima ordinata Y, alla quale ci arrestaremo. Sciogliamo questa quantità in fattori, si avrà

$$AED=x\sqrt{px}\left[1^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}+\ldots\left(\frac{\chi}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Or noi sappiamo dall' algebra, che la somma delle serie infinita

$$1^n+2^n+3^n+4^n+\ldots P^n \text{ è } \frac{P^{n+1}}{n+1}\,;$$

dunque sostituendo in questa serie $\frac{1}{2}$ per n, ed $\frac{\chi}{x}$ in luogo di P si avrà

$$AED=\left(\frac{\chi}{x}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{x\sqrt{px}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\chi\sqrt{p\chi}=\frac{2}{3}\chi Y.$$

Da ciò ne conchiuderemo, che *uno spazio parabolico AED, che riguarda la parte concava della curva è due terzi del rettangolo fatto dalle due coordinate, che colla porzione corrispondente di curva lo racchiudono.*

Quindi *lo spazio parabolico AEH, che riguardo la parte convessa della curva è un terzo del medesimo rettangolo.*

CAPO XIII.

Tangenti, sottangenti; normali, sunnormali delle curve di 2.° grado.

554. Per dare a questa teoria l' influenza su tutte le curve di primo genere, siccome la parabola non ha centro, noi sulle prime rapporteremo ancora l' equazione dell' ellisse, e dell' iperbole al vertice. Allora l' equazione

$$y^2=px+qx^2,$$

costruirà l' ellisse, l' iperbole, o la parabola, secondocchè si avrà

$$p=\frac{2b^2}{a}, \text{e } q=-\frac{b^2}{a^2}; \text{ o } p=\frac{2b^2}{a}, \text{ e } q=\frac{b^2}{a^2};$$

o finalmente $q=0$. Quindi noi andaremo a portare le n.e ricerche sull' equazione

$$y^2=px+qx^2 \ . \ . \ . \ (1),$$

riserbandoci di dare nel risultato i convenienti valori a p, q per aver l' espressioni particolari per l' ellisse, per l' iperbole, e per la parabola.

555. L' idea la più semplice, e più generale, che ci si present' all' oggetto è quella di considerare una segante qualunque, ed indi, fatti riunire i due punti d' intersezione di questa, colla curva in un solo, ritrarne le condizioni per la tangente. A tal effetto consideriamo sul-

le prime un punto comunque situato rispetto alla curva: sia questo dato per mezzo delle coordinate m, n; l' equazione della tangente richiesta considerata come una retta, che passa pe 'l punto (m,n) sarà

$$y-n=A(x-m) \quad . \ . \ . \ . \ (2),$$

ove A rappresenta la tangente dell' angolo, che questa retta fa coll' asse delle ascisse nel sistema delle coordinate rettangolari, o il rapporto de' seni degli angoli, ch' essa fa colli assi delle coordinate nel sistema delle coordinate obblique.

Si elimini y tra (1), e (2); l' equazione (1) diverrà

$$[A(x-m)+n]^2=px+qx^2 :$$

sviluppando ed ordinando rispetto ad x, si avrà

$$x^2+2\frac{A(n-Am)-\frac{1}{2}p}{A^2-q}x+\frac{n^2-2Amn+A^2m^2}{A^2-q}=0,$$

ossia

$$x^2+2\frac{A(n-Am)-\frac{1}{2}p}{A^2-q}x+\frac{(n-Am)^2}{A^2-q}=0 \ . \ (3),$$

Le due radici di questa equazione riguardano i due valori di x AB, AB' corrispondenti a' due punti A', M, ove la segante HM taglia la curva. Ciò posto allorchè la segante diviene tangente, i due punti M, ed A' si riuniscono in un solo A'. ed i due valori di x AB', AB diverranno eguali: dunque la condizione pe 'l contatto della retta colla curva richiede, che le due radici dell' equazione (3) siano eguali. Ve-

Fig. 39

diamo quando ciò succede; ed a tal effetto mettiamo l' equazione (3) sotto la forma

$$x^2+B'x+C=0\,;$$

le radici di questa equazione saranno

$$x=-\tfrac{1}{2}B\pm\sqrt{[\tfrac{1}{4}B^2-C]}\,;$$

chiamiamole x', x'', si avrà

$$x'-x''=2\sqrt{[\tfrac{1}{4}B^2-C]}\,;$$

quindi supponendole eguali, sarà

$$x'-x''=0\,;$$

e perciò

$$2\sqrt{[\tfrac{1}{4}B^2-C]}=0\,,$$

da cui si tira

$$C=\frac{B^2}{4}\,;$$

sicchè la condizione richiesta per il contatto è che sia l' ultimo termine dell' equazione eguale al quadrato della metà del coefficiente del secondo termine (a): Si avrà dunque per la condizione del contatto

$$\left[\frac{A(n-Am)-\tfrac{1}{2}p}{A^2-q}\right]^2=\frac{[n-Am]^2}{A^2-q}\quad\ldots\quad[K],$$

(a) Quando questa condizione ha luogo, le radici dell' equazione diverranno $x=-\frac{1}{2}B=\sqrt{C}$, per cui l' equazione $x^2+Bx+C=0$ diverrà $x^2+C=0$, e si avrà $B=0$, cioè pe 'l contatto si richiede che il coefficiente del 2.° termine dell' equazione sia zero. Il Sig. Puissant si serve di questa condizione per le tangenti alle linee di 2.° grado.

la quale liberata da denominatore, diviene

$$[A(n-Am)-\tfrac{1}{2}p)]^2=(A^2-q)(n-Am)^2;$$

Sviluppando il primo termine, e supprimendo

$$A^2[n-Am]^2,$$

ch' è un fattore di comune, si avrà

$$-A[n-Am]p+\tfrac{1}{4}p^2=-q[n-Am]^2,$$

la quale sviluppata similmente, ed ordinata rispetto ad A diviene

$$A^2-\frac{2n[\tfrac{1}{2}p+qm]}{mp+m^2q}A+\frac{\tfrac{1}{4}p^2+n^2q}{mp+m^2q}=0..(K').$$

Se questa equazione si sciolga rispetto ad A, si avranno due valori i quali c' indicano, che da un punto preso fuori di una curva si possono menare due tangenti: questi ci determineranno i valori degli angoli, che coll' asse delle ascisse debbono fare due rette per divenir tangenti. Rilevato da (K') il valore di A, l' equazione della tangente sarà

$$y-n=\Big[\frac{n(\tfrac{1}{2}p+qm)}{mp+m^2q}\pm$$

$$\sqrt{\left(n^2\left(\frac{\tfrac{1}{2}p+qm}{mp+m^2q}\right)^2-\frac{(\tfrac{1}{4}p^2+n^2q)}{mp+m^2q}\right)}\Big][x-m].$$

356. Supponiamo, che il punto (m,n) si prende sullo stesso diametro delle ascisse; si avrà allora $n=0$, e l' equazione (K') diverrà

$$A^2+\frac{\tfrac{1}{4}p^2}{mp+m^2q}=0,$$

da cui si tira

$$A=\pm\frac{\frac{1}{2}p}{\sqrt{[-pm-qm^2]}}\;\ldots\;(M),$$

ed allora l' equazione richiesta per la tangente sarà

$$y-n=\pm\frac{\frac{1}{2}p}{\sqrt{[-pm-qm^2]}}(x-m)\;\ldots\;(T),$$

ove

$$\frac{\frac{1}{2}p}{\sqrt{[-pm-qm^2]}},$$

indica la tangente dell' angolo, che la retta tangente fa coll' asse delle ascisse nel sistema delle coordinate rettangolari, e nel sistema obbliquo dinota il rapporto de' seni degli angoli, che la stessa fa cogli assi delle coordinate.

357. Il valore di A si presenta sotto una forma imaginaria, ma ciò riguarda la possibilità del problema, come vedremo applicando particolarmente a ciascheduna linea di 2.° grado questa generale espressione.

358. Sia sulle prime il cerchio, la cui equazione, prendendo l' origine sulla circonferenza, è

$$y^2=2Rx-x^2;$$

si avrà

$$p=2R,\ q=-1;$$

sostituendo questi valori in (M) essa diverrà

$$\pm\frac{R}{\sqrt{[m(m-2R)]}},$$

e l' equazione della tangente al cerchio condotta da un punto fuori del suo perimetro sarà

$$y-n=\pm\frac{R}{\sqrt{[m(m-2R)]}}(x-m).$$

Finch' è $2R>m$, la quantità

$$\frac{R}{\sqrt{[m(m-2R)]}},$$

sarà imaginaria, e 'l problema sarà impossibile, e sarà possibile, allorch' è $m>2R$. Nel 1.° caso *Tav II Fig. 9* essendo

$$M'H>M'C,$$

il punto C cadrà dentro la curva; nel secondo poi la condizione di

$$M'C>M'H,$$

fissa il punto C sempre fuori della curva, come si conviene alla possibilità del nostro problema nell' ipotesi presente.

359. Per l' ellisse, poicchè la sua equazione, allorchè l' origine delle coordinate si trova sul suo perimetro è

$$y^2=\frac{2b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2,$$

si avrà

$$p=\frac{2b^2}{a},$$

e

$$q=-\frac{b^2}{a^2};$$

questi valori sostituiti in (M) la trasformeranno in

$$\pm \frac{b}{\sqrt{[m(m-2a)]}},$$

e l' equazione della tangente all' ellisse condotta di un punto fuori del suo perimetro sarà

$$y-n=\pm \frac{b}{\sqrt{[m(m-2a)]}}(x-m).$$

Allorch' è $2a>m$, ossia, allorch' è

$$A'Y'>Y'G,$$

l' espressione

Fig. 18

$$\pm \frac{b}{\sqrt{[m(m-2a)]}},$$

diverrà imaginaria, e 'l problema sarà impossibile: infatti, quando ciò succede il punto dato cade dentro la curva: la condizione poi $2a<m$ rende possibile il problema, giacchè avendosi allora

$$Y'A'<Y'G,$$

il punto cadrà sempre fuori della curva, com' appunto si conviene alla n.ª ipotesi.

360. Similmente essendo l' equazione dell' iperbole, rapportando l' origine delle due coordinate ad un punto del suo perimetro,

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-\frac{2b^2}{a}x,$$

si avrà

$$q=\frac{b^2}{a^2},\ p=-\frac{2b^2}{a}$$

questi valori sostituiti in (M) la cambieranno in

$$\pm \frac{b}{\sqrt{[m(2a-m)]}},$$

e l' equazione della tangente all' iperbole condotta da un punto fuori del suo perimetro sarà

$$y-n=\pm \frac{b}{\sqrt{[m(2a-m)]}}(x-m).$$

Allorchè si ha $m>2a$, l' espressione

$$\pm \frac{b}{\sqrt{[m(2a-m)]}},$$

diviene imaginaria; e 'l problema sarà impossibile; al contrario se si ha $m<2a$, l' espressione stessa è reale, e 'l problema è sempre possibile. Infatti nel 1.° caso, dovendo essere

Tav. III Fig. 32

$$B'C>B''B',$$

il punto dato (m,n) cadrà dentro la curva, e nel 2.°,

$$B''C<B''B',$$

il punto (m,n) sarà fuori della curva

561. Finalmente, poichè l' equazione della parabola è $y^2=px$, p sarà il parametro della curva, e $q=0$: quindi con questa sostituzione l' espressione (M) diverrà

$$\pm \frac{p}{2\sqrt{-pm}},$$

e l' equazione della tangente alla parabola condotta da un punto fuori del suo perimetro sarà

$$y-n=\pm \frac{p}{2\sqrt{-pm}}(x-m).$$

L' espressione

$$\pm\frac{p}{2\sqrt{-pm}},$$

sembra imaginaria, ed essa lo è tutte le volte che p, ed m avranno lo stesso segno, ossia tutte le volte, che m è una quantità positiva, giacchè p lo è sempre; se m sarà una quantità negativa essa diverrà reale. Quindi, contando le ascisse positive da A verso X, il problema, di cui ci occupiamo sarà impossibile, allorchè m si prenderà ancora da A verso X, ed al contrario sarà possibile, allorchè M si prende dalla parte opposta da A verso S; cioè il problema sarà impossibile, quando il punto (m,n) cade dentro la curva, e sarà possibile, quando cade al di fuori.

Fig. 35.

362. Chiamiamo m' l' ascissa dal centro nel cerchio, sarà

$$m=R-m',$$

e l' espressione

$$\pm\frac{R}{\sqrt{[m(m-2R)]}},$$

diverrà

$$\pm\frac{R}{\sqrt{(m'^2-R^2)}}:$$

allora l' equazione della tangente circolare menata da un punto fuori della curva, e fissando l' origine delle coordinate al centro, sarà

$$y-n'=\pm\frac{R}{\sqrt{(m'^2-R^2)}}(x-m);$$

espressione la quale parimente ci dimostra l'im-

possibilità del problema, allorch' è $R>m$; ossia allorchè il punto (m',n') si prende dentro il cerchio.

363. Sostituiscasi $a-m'$ per m nell' equazione ritrovata alla tangente ellittica, ed essa diverrà

$$y-n'=\pm\frac{b}{\sqrt{(m'^2-a^2)}}(x-m'),$$

equazione della tangente dell' ellisse, prendo il centro per origine delle coordinate, e che ci mostra ancora la possibilità del problema nell'ipotesi di $m'>a$, cioè allorchè il punto (m',n') è fuori della curva.

Finalmente, poicchè nell' iperbole si ha

$$m=m'+a;$$

fattone la sostituzione nell' equazione della tangente iperbolica, essa diverrà

$$y-n'=\pm\frac{b}{\sqrt{(a^2-m'^2)}}(x-m');$$

equazione della tangente all' iperbole prendendo il centro per origine delle coordinate, e che ci dimostra la possibilità del problema, finchè si ha $a>m'$, ossia finchè il punto (m',n') cade fuori della curva.

Lo stesso si sarebbe ancora ottenuto direttamente, eseguendo il calcolo (354) sull' equazione

$$y^2=px^2+q,$$

forma, sotto cui si possono ridurre l' equazioni delle linee a centro di 2.° grado.

364. Riuniamo sotto un colpo d'occhio le diverse equazioni ottenute per le tangenti alle curve di 2.° genere

Equazione della tangente alle linee di 2.° grado menata da un punto fuori di essa.

$$y-n=\left[\frac{n(\frac{1}{2}p+qm)}{mp+m^2q}\pm\sqrt{\left(n^2\left(\frac{\frac{1}{2}p+qm}{mp+m^2q}\right)^2-\frac{(\frac{1}{4}p^2+n^2q)}{mp+m^2q}\right)}\right](x-m)$$

Equazione della tangente al cerchio da un punto fuori di essa.

$$y-n=\pm\frac{R}{\sqrt{[m(m-2R)]}}(x-m).\ \text{Fis. l' orig. sulla curva}$$

$$y-n'=\pm\frac{R}{\sqrt{(m'^2-R^2)}}(x-m).\ \text{Fis. l' orig. al centro}$$

Equazione della tangente all' ellisse da un punto fuori di essa.

$$y-n=\pm\frac{b}{\sqrt{[m(m-2a)]}}(x-m).\ \text{Fis. l'orig. sulla curva}$$

$$y-n'=\pm\frac{b}{\sqrt{(m'^2-a^2)}}(x-m').\ \text{Fis. l' orig. al centro}$$

Equazione della tangente all'iperbole da un punto fuori di essa.

$$y-n=\pm\frac{b}{\sqrt{[m(2a-m)]}}(x-m).\ \text{Fis. l'orig. sulla curva}$$

$$y-n'=\pm\frac{b}{\sqrt{(a^2-m'^2)}}(x-m').\ \text{Fis. l' orig. al centro}$$

Equazione della tangente alla parabola da un punto fuori di essa.

$$y-n=\pm\frac{p}{\sqrt{(-pm)}}(x-m).\ \text{Fis. l' orig. sulla curva.}$$

365. Nell'ellisse, e nell'iperbole, cambiando b in a, ed all' opposto, si avrebbe la corrispondente equazione della tangente, ec. prendendo $2b$, pe 'l diametro delle ascisse.

366. Se il punto (m,n) è dato sulla stessa curva, vi sarà allora luogo alla condizione

$$n^2=pm+qm^2.$$

Quindi sostituendo in (K') (355) per n^2 il suo valore

$$pm+qm^2,$$

e viceversa, essa diverrà

$$A^2-2\frac{(\frac{1}{2}p+qm)}{n}A+\frac{\frac{1}{4}p^2+pqm+q^2m^2}{n^2}=0,$$

ossia

$$A^2-2\frac{(\frac{1}{2}p+qm)}{n}A+\left(\frac{\frac{1}{2}p+qm}{n}\right)^2=0,$$

ossia infine

$$\left(A-\frac{\frac{1}{2}p+qm}{n}\right)^2=0,$$

da cui si tira

$$A=\frac{\frac{1}{2}p+qm}{n}:$$

Sostituito questo valore di A nell' equazione

$$y-n=A(x-m),$$

si avrà

$$y-n=\frac{\frac{1}{2}p+qm}{n}(x-m)\ .\ .\ .\ (T):$$

e sarà questa l' equazione della tangente ad una

linea di secondo grado, menata da un punto preso sul suo perimetro, prendendo l'origine delle coordinate sulla curva medesima. La quantità

$$\frac{\frac{1}{2}p+qm}{n},$$

indica la tangente dell' angolo, che la tangente dee fare coll' asse delle ascisse nel sistema delle coordinate rettangolari, e nel sistema di due diametri conjugati obbliqui indica il rapporto de' seni, che la stessa tangente dee formare co' diametri conjugati.

367. Se nell' equazione

$$y-n=\frac{\frac{1}{2}p+qm}{n}(x-m),$$

facciamo $y=0$, per avere il punto, ove la tangente incontra l' asse delle ascisse, si avrà

$$x=-\frac{n^2}{\frac{1}{2}p+qm}+m,$$

Tav. III Fig. 59 che sarà l' espressione di AT; quindi si avrà

$$x-m=-\frac{n^2}{\frac{1}{2}p+qm};$$

la quantità $x-m$ è il valore di $AT-AB$, e poichè AB è presa in parte opposta ad AT, si avrà

$$x-m=BT=-\frac{n^2}{\frac{1}{2}p+qm}.$$

La retta BT intercetta fra il piede dell' ordinata per lo contatto, e 'l punto, ove la tan-

gente incontra l' asse delle ascisse, chiamasi *suttangente*. Sicchè l' espressione generale della *suttangente* per le curve di secondo grado, l' origine delle coordinate essendo sul perimetro della curva è

$$-\frac{n^2}{\frac{1}{2}p+qm}.$$

368. Meniamo la normale $A'N$, la sua equazione, dovendo soddisfare alle condizioni di esser perpendicolare alla tangente, e di passare pe 'l punto (m,n), sarà

Fig. 39

$$y-n=-\frac{1}{A}(x-m),$$

ossia

$$y-n=-\frac{n}{\frac{1}{2}p+qm}(x-m) \quad . \quad . \quad . \quad (N),$$

369. Facciamo in questa equazione $y=0$, si avrà

$$x=\tfrac{1}{2}p+qm+m=AN;$$

e quindi

$$x-m=AN-AB=BN=\tfrac{1}{2}p+qm.$$

La retta BN intercetta fra il piede dell' ordinata per lo contatto, e 'l punto, ove la normale incontra l' asse delle ascisse, dicesi *sunnormale*. Dunque l' espressione generale della sunnormale per le curve di 2.° grado, fissando l' origine delle coordinate sul perimetro della curva, è

$$\tfrac{1}{2}p+qm.$$

370. Avute l'espressioni della suttangente, e della sunnormale, potremo facilmente avere quel-

le della tangente, e della normale (35). Quindi poicchè al punto A' le coordinate sono o, ed n, ed al punto T, $n'=0$, ed

$$m'=-\frac{n^2}{\tfrac{1}{2}p+qm},$$

sarà

$$A'T^2=n^2+\frac{n^4}{(\tfrac{1}{2}p+qm)^2},$$

da cui si ottiene

$$A'T=\frac{n}{\tfrac{1}{2}p+qm}\sqrt{[(\tfrac{1}{2}p+qm)^2+n^2]},$$

Similmente si avrà

$$A'N^2=n^2+(\tfrac{1}{2}p+qm)^2,$$

da cui si ha

$$A'N=\sqrt{[(\tfrac{1}{2}p+qm)^2+n^2]}:$$

La prima di queste due espressioni è quella della tangente, e la seconda della normale alle linee di 2.° grado, fissando l' origine delle coordinate sulla curva.

371. Ecco sotto un colpo d' occhio riunite tutte l' espressioni relative alle tangenti, e normali delle curve di 2.° grado

Per le linee di 2.° grado, fissando l'origine al vertice, ed indicando con m, n le coordinate al punto di contatto.

$V \ldots$

$$y-n=\frac{\frac{1}{2}p+qm}{n}(x-m) \ldots \text{ Equaz. della tang.}$$

$$y-n=-\frac{n}{\frac{1}{2}p+qm}(x-m) \ldots \text{ Equaz. della nor.}$$

$$-\frac{n^2}{\frac{1}{2}p+qm} \ldots \text{ Espres. gen. della sottang.}$$

$$\tfrac{1}{2}p+qm \ldots \text{ Espres. gen. della sunnorm.}$$

$$\frac{n}{\frac{1}{2}p+qm}\sqrt{[(\tfrac{1}{2}p+qm)^2+n^2]} \ldots \text{ Esp. gen. della tang.}$$

$$\sqrt{[(\tfrac{1}{2}p+qm)^2+n^2]} \ldots \text{ Espres. gen. della nor.}$$

572. Applichiamo queste formole generali alle curve particolarmente. E sulle prime poicchè l' equazione del cerchio, in cui l' origine delle coordinate è sulla curva, è

$$y^2=2Rx-x^2,$$

si avrà, come si è veduto al di sopra

$$p=2R, \; q=-1:$$

con queste sostituzioni, avendo ancora l' accortezza di sostituire

$$2Rm-m^2,$$

ad n^2, si avrà

Per il cerchio, fissando l'origine delle coordinate sulla circonferenza, e chiamando m, n le coordinate al punto di contatto

C.

$y-n=\frac{R-m}{n}(x-m)$ ... Equaz. della tang.

$y-n=-\frac{n}{R-m}(x-m)$ .. Equaz. della nor.

$\frac{2Rm-m^2}{R-m}$ . . . Espres. della sottangente

$R-m$ . . . Espressione della sunnormale

R . . . . . Espressione della normale

$\sqrt{\left(2Rm-m^2+\left(\frac{2Rm-m^2}{R-m}\right)^2\right)}$. Esp. della tang.

373. Similmente poichè l'equazione dell' Ellisse, allorchè le coordinate sono prese dal vertice è

$$y^2=\frac{2b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2,$$

sarà

$$p=\frac{2b^2}{a},\ \text{e}\ q=-\frac{b^2}{a^2}:$$

quindi profittando ancora della condizione

$$n^2=\frac{b^2}{a^2}(2am-m^2),$$

sarà

Per l'ellisse, fissando l'origine delle coordinate al vertice, e chiamando m, n le coordinate al punto di contatto.

$$E..\left\{\begin{array}{ll}
y-n=\dfrac{b^2(a-m)}{a^2n}(x-m) & \text{.. Equaz. alla tang.}\\[2ex]
y-n=-\dfrac{a^2n}{b^2(a-m)}(x-m) & \text{.. Equaz. alla nor.}\\[2ex]
\dfrac{2am-m^2}{a-m} & \text{.... Espressione della sottangente}\\[2ex]
\dfrac{b^2}{a^2}(a-m) & \text{... Espres. della sunnormale}\\[2ex]
\sqrt{\left[\dfrac{b^2}{a^2}(2am-m^2)+\left(\dfrac{2am-m^2}{a-m}\right)^2\right]} & \text{.. Esp della tang.}\\[2ex]
\sqrt{\left[\dfrac{b^2}{a^2}(2am-m^2)+\dfrac{b^4}{b^4}(a-m)^2\right]} & \text{.. Esp della normale}
\end{array}\right.$$

574. Per l' iperbole, poicchè la sua equazione, rapportando le coordinate al vertice

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-\frac{2b^2}{a}x,$$

sarà

$$q=\frac{b^2}{a^2}, \text{ e } p=-\frac{2b^2}{a};$$

quindi, riflettendo ancora alla condizione

$$n^2=\frac{b^2}{a^2}(m^2-2am),$$

sarà

Per l'iperbole, fissando l'origine delle coordinate al vertice, e chiamando m, n le coordinate al punto di contatto.

I.

$y-n=\frac{b^2(m-a)}{a^2n}(x-m)$.. Equaz. alla tang.

$y-n=-\frac{a^2n}{b^2(m-a)}(x-m)$.. Equaz. alla nor.

$\frac{m^2-2am}{m-a}$ . . . . Espres. della sottangente

$\frac{b^2}{a^2}(m-a)$ . . . Espres. della sunnormale

$\sqrt{\left[\frac{b^2}{a^2}(m^2-2am)+\left(\frac{m^2-2am}{m-a}\right)^2\right]}$.. Espr. della tang.

$\sqrt{\left[\frac{b^2}{a^2}(m^2-2am)+\frac{b^4}{a^4}(m-a)^2\right]}$.. Esp. della nor.

575. Finalmente poicchè l'equazione della parabola è $y^2=px$, il coefficiente p dell' equazione generale indicherà il parametro della curva, e sarà $q=0$; quindi profittando ancora della condizione $n^2=pm$, le formole generali (V) si cambieranno in quest' altre

Per la parabola, chiamando m, n le coordinate al punto di contatto.

P..

$y-n=\frac{p}{2n}(x-m)$.. Equazione alla tangente

$y-n=-\frac{2n}{p}(x-m)$.. Equaz. della normale

$2m$ . . . Espressione della sottangente

$\frac{1}{2}p$ . . Espressione della sunnormale

$\sqrt{(pm+4m^2)}$ . . . Espressione della tang.

$\sqrt{(pm+\frac{1}{4}p^2)}$ . . . Espres. della normale.

376. L' espressioni della sottangente, e della sunnormale, nella parabola ci dimostrano, che in questa curva la *sottangente è doppia dell' ascissa corrispondente al punto di contatto, e che la sunnormale è eguale alla metà del parametro.*

377. Quindi se dà un punto A' preso sul perimetro parabolico si ordini $A'B$, ed indi tagliata $AT=AB$, si congiunga $A'T$ sarà questa la tangente, che può menarsi dal punto A'. Fig. 10

378. Se nelle curve a centro l' origine delle coordinate si fissi al centro, allora le formole C, E, I si trasformeranno in quelle, che dipendono dall' origine delle coordinate fissata al centro. Infatti indichiamo con m'' l' ascissa al centro, e riflettendo che nel cerchio e nell' ellisse l' asciss' al centro è presa in parte opposta a quell' al vertice, si avrà pe 'l cerchio

$$-m''=R-m\ ,$$

per l' ellisse

$$-m''=a-m\ ,$$

e per l' iperbole

$$m''=m-a:$$

sostituendo in C, E, I, per m il suo valore che si ha da quest' equazioni, si avrà

Per il cerchio, fissando l'origine delle coordinate al centro, e chiamando m'', n le coordinate al punto di contatto.

C..

$y-n=-\frac{m''}{n}(x-m'')$.. Equ. alla tang.

$y-n=\frac{n}{m''}(x-m'')$.. Equazione alla nor.

$\frac{R^2-m''^2}{m''}$ . . . . Espr. della sottang.

m'' . . . . Espres. della sunnor.

$\sqrt{\left[R^2-m''^2+\left(\frac{R^2-m''^2}{m''}\right)^2\right]}$. Espr. della tan.

R . . . . Espressione della nor.

L' espressione delle normale nel cerchio è il raggio, tanto allorchè l' origine delle coordinate è sulla circonferenza, quanto allorch' è al centro. Questo è analogo a ciocchè si sa degli elementi di Geometria Piana, cioè che il raggio nel cerchio è perpendicolare alla tangente nel punto di contatto

Per l'ellisse, fissando l'origine delle coordinate al centro, e chiamando m'', e le coordinate al punto di contatto.

$$E\begin{cases} y-n=-\dfrac{b^2m''}{a^2n}(x-m'') \text{.. Equ. alla tang.} \\ y-n=\dfrac{a^2n}{b^2m''}(x-m'') \text{.. Equazione alla nor.} \\ \dfrac{a^2-m''^2}{m''} \text{.... Espres. della sottang.} \\ \dfrac{b^2m''}{a^2} \text{.... Espres. della sunnor.} \\ \sqrt{\left[\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-m''^2)+\left(\dfrac{a^2-m''^2}{m''}\right)^2\right]}. \text{ Espr. della tang.} \\ \sqrt{\left[\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-m''^2)+\dfrac{b^4m''^2}{a^2}\right]}. \text{ Esp. della nor.} \end{cases}$$

Per l'iperbole, fissando l'origine delle coordinate al centro, e chiamando m'', e le coordinate al punto di contatto.

$$I'\begin{cases} y-n=\dfrac{b^2m''}{a^2n}(x-m'') \text{.. Equaz. alla tang.} \\ y-n=-\dfrac{a^2n}{b^2m''}(x-m'') \text{.. Equaz. alla norm.} \\ \dfrac{m''^2-a^2}{m''} \text{.... Espressione della sottan.} \\ \dfrac{b^2m''}{a^2} \text{.... Espres. della sunnor.} \\ \sqrt{\left[\dfrac{b^2}{a^2}(m''^2-a^2)+\left(\dfrac{m''^2-a^2}{m''}\right)^2\right]}. \text{ Esp. della taug.} \\ \sqrt{\left[\dfrac{b^2}{a^2}(m''^2-a^2)+\dfrac{b^4m''^2}{a^2}\right]}.. \text{ Espr. della normale.} \end{cases}$$

379. Per menare una tangente ad una linea di 2.° grado, dietro la sua equazione, bisogna procedere nel seguente modo. Sia p. e., un' ellissi: supponiamo l' origine delle coordinate al centro, e 'l punto da cui si vuol condurre la tangente situato sulla curva (a), come F: si determini coll' uso delle tavole trigonometriche l' angolo che dee far la tangente col sistema delle coordinate per mezzo della quantità

$$-\frac{b^2m''^2}{a^2n};$$

indi condotta una retta OP, che s' inclina a diametri sotto il dato angolo, si meni da F una retta FT parallela ad OP; sarà OF la tangente richiesta, il che è chiaro. Fig.

Lo stesso si avrebbe, costruendo, come si è insegnato sopra (30) l' equazione della tangente sopra il sistema de' diametri dati, ossia segnando i limiti T, e T', pe' quali dee passar la tangente.

380. Per ottenere l' equazione della tangente, noi abbiamo supposte eguali le due ascisse corrispondenti a' punti, ove una segante taglia una linea di 2.° grado, cioè abbiamo fatto riunire que' due punti nel solo punto di contatto. Andiamo ora a dimostrare a posteriori, che la tangente alle curve di secondo grado non ha che un solo punto di comune colla curva; a tal effetto mettiamo l' equazione della tangente (F) alle curve di 2.° grado, sotto la forma

(a) Questa supposizione non osta alla generalità del problema; giacchè può adoperarsi lo stesso metodo, allorchè l' origine delle coordinate, e della tangente è ad un punto qualunque.

$$yn-n^2=\tfrac{1}{2}px-\tfrac{1}{2}pm+qmx-qm^2\ ;$$

e questa sotto l' altra

$$yn-qmx=n^2-\tfrac{1}{2}pm-qm^2+\tfrac{1}{2}px\ ;$$

riducendo questa per mezzo delle condizioni

$$n^2-qm^2=pm\ ,$$

si avrà

$$yn-qmx=\tfrac{1}{2}pm+\tfrac{1}{2}px\ .\ .\ .\ .\ (T).$$

Ciò posto dall' equazione

$$n^2-qm^2=pm\ ,$$

si sottragga il doppio di (T), ed ad ambi i membri della risultante si aggiunga

$$y^2-qx^2\ ,$$

si avrà

$$(n-y)^2-q(m-x)^2=y^2-qx^2-px\ :$$

or affinchè abbia luogo la condizione

$$y^2-qx^2-px=0\ ,$$

bisogna che sia

$$y=n\ ,\ \text{ed}\ x=m\ :$$

dunque l' equazione alla linea di 2.° grado, avendo luogo in questo solo caso, il solo punto (m,n) della tangente sarà comune colla curva.

381. Nell' espressione della sottangente ellittica, tanto allorchè l'origine delle coordinate è sulla curva, quanto allorch' è al centro non vi entra, che il solo diametro $2a$. Dunque in tutte l' ellissi, che hanno uno stesso diametro, ad una stess' ascissa vi corrisponde una stessa sottangente. Infatti la sottangente del cerchio è

$$CQ=\frac{a^2}{m''},$$

ci dimostra, che *un semidiametro è medio proporzionale tra l' ascissa al centro, e la somma di essa, e della sottangente.*

384. Rappresenti $B'B'$, AA', il sistema di due diametri conjugati qualunque sarà

$$CT=\frac{a^2}{m},$$

ed

$$m : a=a : CT;$$ Fig. 16

e quindi

$$CT : a=a : m:$$

dunque conoscendo CT, ed a, si renderà noto parimente la quantità m, e quindi resterà determinato il punto di contatto. Da ciò se ne deduce una costruzione semplicissima, per menare graficamente una tangente all' ellisse da un punto preso fuori di essa. Sia T un tal punto; per T, e pe 'l centro si farà passare la TB''; indi si faccia

$$CT : CB'=CB' : CB :$$

di poi dal punto B si meni BM parallelamente al conjugato di $B'B'$; si unisca il punto T col punto M, sarà questa la tangente richiesta.

385. Nell' iperbole si ha

$$NO=\frac{m''^2-a^2}{m''};$$ Fig. 18

quindi, poicch' è

$$CO=CN-NO,$$

sarà

$$CO=\frac{a^2}{m'}.$$

La prima di queste due espressioni ci dimostra che *nell' iperbole*, contando le ascisse dal centro, *la sottangente è quarta proporzionale in ordine all' ascissa corrispondente al punto di contatto, e la differenza di essa dal semidiametro*; e la seconda ci dimostra, *che un semidiametro è medio proporzionale tra l' ascissa corrispondente al punto di contatto, e la differenza di essa, e della sottangente*.

Quindi, pratticando come nell' ellisse (284), se da un punto O si vuol menare graficamente una tangente all' iperbole, basta menare dal punto O il diametro $B'B$; allora, presa CN terza proporzionale in ordine a CO, e CB, si meni la semiordinata NM parallelamente al conjugato di BB', e si unisca il punto O col punto M; la OM sarà la tangente richiesta.

586. Essendo

$$CO=\frac{a^2}{m};$$

essa non potrà giammai divenire zero; che anzi è suscettibile di tutt' i valori, che sono tra $\frac{1}{\infty}$, ed ∞, secondocch' è $m=0$, o $m=\infty$; quindi *la tangente nell' iperbole non può giammai giugnere fino al centro, tuttocchè continuamente se gli avvicini.*

387. Questa proprieta della tangente iperbolica è una conseguenza della teoria degli asintoti.

388. Meniamo nell'ellisse dal punto di contatto E un semidiametro EB, la sua equazione sarà

$$y=a'x\,;$$ Fig. 17

ma, chiamando m, n le coordinate al punto di contatto, vi è luogo alla condizione

$$n=a'm,$$

da cui si tira

$$a'=\frac{n}{m}\,;$$

dunque sostituendo questo valore di a' nell' equazione

$$y=a'x,$$

si avrà

$$y=\frac{n}{m}x.$$

Ciò posto, se meniamo una tangente dal punto E, la cui equazione sia

$$y-n=a''(x-m),$$

vi sarà luogo alla condizione

$$a''=-\frac{b^2m}{a^2n}\,;$$

quindi si avrà

$$a'a''=-\frac{b^2}{a^2}\,;$$

ma abbiamo osservato che anche questo stesso rapporto determina la posizione di due corde mena-

te nell'ellisse dagli estremi del diametro $2a$ ad un punto qualunque del perimetro ellittico; dunque una tangente ellittica, e 'l semidiametro menato dal punto di contatto possono riguardarsi come corde di un'altra ellisse BEC rapportata a due diametri conjugati il cui rapporto è $\frac{b}{a}$.

Lo stesso ha luogo nell'iperbole. Infatti se dal punto M di contatto si meni un semidiametro MC, si avrà

Fig. 31

$$y=\frac{n}{m}x,$$

equazione che paragonata con quella della tangente

$$y^2=\frac{b^2n}{a^2n}(x-m)$$

da

$$\frac{n}{m}\cdot\frac{b^2m}{a^2n}=\frac{b^2}{a^2}:$$

e quindi la tangente OM, e 'l semidiametro MC possono essere riguardate come corde di un'altra iperbole

$$K''OPn'CP',$$

che ha CO per asse primario, ed in cui il rapporto dell' asse secondario al primario è $\frac{b}{a}$.

Nello stesso modo, allorchè l' iperbole è rapportata a due diametri conjugati, la $a'h$ tangente dell' iperbole $Ka'S$, e 'l semidiametro $a'C$ menato dal punto di contatto a' possono es-

Fig. 34

sere riguardate come corde di un' altra iperbole $ka'gk'Cg$, in cui il rapporto de' diametri è identico a quello, che ha luogo tra' diametri a' quali è rapportata la prima iperbole.

389. Segue da ciò, che se nell'ellisse, o nell' iperbole meniamo due corde

$$B'O,\ OA;\ BN,\ NB',$$

Fig. 17, e 31

ed indi si meni un semidiametro BG, MC parallelo il primo alla corda AO, e l' altro alla corda NB', la tangente che si condurrà nell' ellisse dal punto G, e nell' iperbole dal punto M, punti ove i rispetti diametri incontrono la curva, dovrà riuscire parallela all' altra corda; altrimenti indicando con A, A' la posizione delle due corde rispetto all' asse delle ascisse, se ciò non fosse, non vi sarebbe luogo alla condizione qui sopra dimostrata

$$AA'=a'a''.$$

390. Quindi, o nell' ellisse, o nell'iperbole indicando con α, α' la posizione di un diametro, e della tangente menata dal suo vertice rispetto all' asse delle ascisse, e con β, β' la posizione di un altro diametro e della corrispondente tangente rispetto allo stesso asse delle ascisse, poichè si ha $\alpha\alpha'=\beta\beta'$, se facciamo $\beta=\alpha'$, darà essere ancora $\beta'=\alpha$. Cioè, *menati due diametri, e pe' vertici di essi le tangenti, se un diametro è parallelo alla tangente menata dal vertice dell' altro, riuscirà benanche l' altro diametro parallelo all' altra tangente, e saranno tali diametri conjugati, il che è analogo a ciocchè abbiamo dimostrato al di sopra.*

391. Si meni nell'ellisse una tangente TM, ed al punto di contatto si menino da' fuochi i raggi vettori FM, fM; si ordini dal punto di contatto la MB; sarà

Fig. 16

$$\tang MFB = \frac{MB}{BF};$$

si dinotino con m, n le coordinate al punto di contatto, e con e l'eccentricità, si avrà

$$\tang MFB = \frac{n}{m-e}.$$

Si ha dippiù

$$\tang MTB = -\frac{b^2 m}{a^2 n}.$$

Quindi ci sarà nota la tangente dell'angolo FMT (37) per mezzo dell'equazione

$$\tang(\varepsilon,\varepsilon') = \frac{\tang(\varepsilon',x) - \tang(\varepsilon,x)}{1 + \tang(\varepsilon,x)\tang(\varepsilon',x)} \ldots (R);$$

sostituendo in questa la quantità $\frac{n}{m-e}$ per

$$\tang(\varepsilon,x), \text{ e } -\frac{b^2 m}{a^2 n} \text{ per } \tang(\varepsilon',x),$$

e riducendo, si avrà

$$\tang(\varepsilon,\varepsilon) = \tang FMT = \frac{a^2n^2 + b^2m^2 - b^2em}{(a^2-b^2)mn - a^2en},$$

e riducendo ancora quest'equazione per mezzo delle condizioni

$$e^2 = a^2 - b^2,$$

ed

$$a^2n^2+b^2m^2=a^2b^2 ,$$

delle quali la prima è l'espressione del quadrato dell'eccentricità, e la seconda è l'equazione dell'ellisse al punto (n,m), essendo per ipotesi un tal punto situato sulla curva, si avrà infine

$$\text{tang}FMT=\frac{a^2b^2-b^2em}{e^2mn-a^2en}=\frac{b^2(a^2-em)}{en(em-a^2)}=-$$

$$\frac{b^2(em-a^2)}{en(em-a^2)}=-\frac{b^2}{en}.$$

Similmente essendo

$$\text{tang}MfR=\frac{MB}{Bf}=\frac{n}{m+e},$$

e

$$\text{tang}MTR=-\frac{b^2m}{a^2n};$$

con tali sostituzioni l'equazione (R) darà

$$\text{tang}fMT=\frac{b^2}{en},$$

come dovea esserlo, giacchè la sola quantità e soffre un cambiamento di segno. Quindi i due angoli FMT, fMT saranno supplementi uno dell'altro (trig.14); ma è ancora FMH supplemento di FMT, ed fMH supplemento di fMT, sicchè sarà

$$FMT=fMH,$$

ed

$$fMT=FMH,$$

dal che ne conchiuderemo, che *i raggi vet-*

tori menati al punto di contatto fanno colla tangente dall' una, e l' altra parte angoli eguali.

392. La stessa proprietà può agevolmente, e nello stesso modo dimostrarsi nell' iperbole, riflettendo solamente ch' essendo gli angoli

Fig. 30 $PF'N$, PFB,

che fanno i raggi vettori coll' asse delle ascisse presi per verso opposto riguardo al medesimo asse, bisogna con de' convenevoli cambiamenti prenderli dalla stessa parte nel seguente modo.

Si ha

$$\tang PFB = \frac{GP}{GF} = \frac{n}{e-m};$$

quindi sarà

$$\tang PFN = -\frac{n}{e-m},$$

or è

$$\tang PF'N = \frac{GP}{GF'} = \frac{n}{e+m},$$

e $$\tang LDN = \frac{b^2 m}{a^2 n};$$

sicchè raccomodandone con tali cambiamenti il calcolo precedente, o sostituendo questi valori di queste tangenti in (R), si avrà

$$\tang DPF = \frac{b^2}{en},$$

e $$\tang DPF' = \frac{b^2}{en},$$

dal che ne conchiuderemo

$$DPF = DPF'.$$

393. Segue da ciò, che *tanto nell'iperbole, quanto nell' ellisse la normale divide per metà l' angolo di due raggi vettori menati al punto di contatto.* Fig. 16

Infatti, condotta nell' ellisse la normale MN, essendo

$$NMT = NMH,$$

ed

$$FMT = fMH,$$

sarà

$$NMF = NMf.$$

Similmente nell' iperbole, condotta la normale PN, e prolungato il raggio vettore $F'P$ in f, Fig. 39 poicchè si ha

$$NPD = NPL,$$

ed

$$FPD = fPL,$$

sarà

$$NPF = NPf.$$

394. Dalla verità quì sopra dimostrata possiamo dedurne un metodo grafico di menare una tangente all' ellisse, ed all' iperbole tanto da un punto preso sulla curva, quanto fuori di essa (a).

395. Nella parabola, poicchè uno de' fuochi si va a perdere all' infinito, uno de' raggi vettori diverrà parallelo all' asse, come MX'; quindi sarà l' angolo Fig. 40

(a) Vedi la n.ª geometrica analitica (pag. 162, e 328).

$$MTX=tMX.$$

Ma giova dimostrare direttamente questa verità collo metodo praticato qui sopra per l' ellisse, e per l' iperbole.

Si meni dal punto di contatto la semiordinata MP, si avrà

$$\text{tang}MFP=\frac{PM}{PF}=\frac{n}{\frac{p}{4}-m},$$

e quindi (a)

$$\text{tang}MFX=-\frac{n}{\frac{p}{4}-m};$$

dippiù si ha

$$\text{tang}MTX=\frac{p}{2n};$$

dunque sostituendo questi valori in (R) si avrà

$$\text{tang}FMT=\frac{p}{2n}=\text{tang}\,MTX=\text{tang}\,tMX';$$

e sarà per conseguenza

$$MTX=tMX';$$

cioè *nella parabola l' angolo fatto dalla tangente col raggio vettore al punto di contatto è eguale all' angolo, che colla tangente fa la parallela menata all' asse dal punto di contatto.*

396. Questa proprietà da parimente luogo ad

(a) Abbiamo presa la tangente dell' angolo MPX, perchè la ascisse si contano da A verso X.

un metodo facile, per menare graficamente una tangente alla parabola (a).

397. Abbiamo trovato (131) chiamando e l' eccentricità

$$FM=a-\frac{ex}{a},$$

Tav. II Fig. 16

ed

$$fM=a+\frac{ex}{a};$$

moltiplicando fra loro queste quantità, si avrà

$$FM\cdot fM=a^2-\frac{e^2x^2}{a^2}\ldots(G).$$

Si meni dal punto M il diametro MK, e si determini il suo conjugato PQ; il primo si chiami $2a'$, e 'l secondo $2b'$; essendo

$$CM^2=CB^2+BM^2,$$

sarà

$$a'^2=x^2+y^2=x^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}=\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)x^2+b^2$$

$$=\frac{e^2x^2}{a^2}+b^2:$$

dippiù si ha

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2\ (174);$$

mettendo per a'^2 il valore quì sopra ritrovato, si avrà

(a) Vedi la n.a geog. analit. pag. 298.

$$b'^2=a^2-\frac{e^2x^2}{a^2},$$

equazione identica all' altra (G); sarà dunque

$$FM \cdot fM=b'^2;$$

cioè *nell' ellisse il rettangolo di due raggi vettori menati ad un punto qualunque del suo perimetro è eguale al quadrato del semidiametro conjugato a quello, che passa per questo punto.*

398. Nello stesso modo, se al punto P dell' iperbole ove s' incontrano due raggi vettori si meni un diametro $2a'$, e $2b'$ sia il suo conjugato, si avrà Fig. 16

$$a'^2-b'^2=a^2-b^2,$$

da cui si tira $b'^2=a'^2-a^2+b^2$; ma è

$$a'^2=\frac{e^2x^2}{a^2}-b^2,$$

sicchè sarà

$$b'^2=\frac{e^2x^2}{a^2}-a^2=$$

$$\left(\frac{ex}{a}+a\right)\left(\frac{ex}{a}-a\right)=F'P \cdot FP(224),$$

ed avrà anche luogo nell' iperbole la stessa proprietà dimostrata quì sopra nell' ellisse.

399. Un punto B in una curva a centro qualunque sia dato per mezzo delle due coordinate AG, GB, che chiameremo (m, n): s' intenda da questo punto menata una segante BMM', e le coordinate AI, IM ad un punto, Fig. 18

ov' essa incontra il perimetro della curva, si chiamino x, y, e la distanza BM si chiami z: si avrà

$$z^2=(m-x)^2+(n-y)^2+p \quad . \; , \; . \; (1),$$

esprimendo con p la quantità aggiunt' a' quadrati

$$(m'-m)^2+(n'-n)^2,$$

nell' espressione della distanza de' due punti dati (35): facendo

$$\omega=\frac{p}{(m-x)^2}+1,$$

l' espressione (1) diverrà

$$z^2=\omega(m-x)^2+(n-y)^2 \quad . \; . \; . \; (2).$$

D' altronde l' equazione della retta BA è

$$n-y=a'(m-x) \quad . \; . \; . \; (3)$$

sostituendo in (2) il valore di $n-y$ preso dall'equazione (3), si avrà

$$z^2=\omega(m-x)^2+a'^2(m-x)^2=(\omega+a'^2)(m-x)^2,$$

d' onde si tira

$$m-x=\frac{z}{\sqrt{[\omega+a'^2]}},$$

valore, che sostituito in (3) ci da

$$n-y=\frac{a'z}{\sqrt{[\omega+a'^2]}};$$

si faccia

$$\frac{1}{\sqrt{[\omega+a'^2]}}=K,$$

si avrà

$$x = m - Kz\,,$$

ed

$$y = n - a'Kz\,;$$

si sostituiscano questi valori di y, ed x nell' equazione alla curva posta sotto la forma

$$y^2 = q(a^2 - x^2)\,,$$

ordinando rispetto a z, e riducendo si avrà

$$z^2 - \frac{2(a'n + qm)z}{(a'^2 + q)K} + \frac{n^2 + m^2 q - a^2 q}{K^2(a'^2 + q)} = 0 \;.\;.\;.\; (4).$$

Questa equazione essendo di 2°. grado ci dimostra, *che una retta non taglia una curva a centro di 1.° genere che in due punti* (a).

Se dallo stesso punto B si mena un' altra segante Bmm', che abbia cogli assi coordinate una posizione designata da a''; chiamando K' la quantità

$$\frac{1}{\sqrt{[\alpha' + a''^2]}}\,,$$

e z' la distanza Bm; i valori di x, ed y saranno rispettivamente

$$m - K'z'\,;\; n - a''K'z'\,,$$

(a) Lo stesso avrebbe potuto dimostrarsi eliminando tra l'equazione della retta, e l' altra (1) 652) la y: l' equazione risultante in x monta al secondo grado, e ci segna le due ascisse corrispondenti a' punti d' intersezione; infatti e questi punti, e la retta, e la curva hanno la medesima ordinata y. Dal che potremo generalmente conchiudere, che combinando le locali di due curve, il numero de' loro punti d' intersezione sia eguale alle radici reali dell' equazione risultante, cosicchè colla combinazione di queste curve possono quelle radici costruirsi, del che nella costruzione delle radici di 3.°, e 4.° grado.

e si avrà

$$z'^2 - \frac{2(a''n+qm)^2}{(a''^2+q)K'}z' + \frac{n^2-m^2q-a^2q}{K'^2(a''^2+q)} = 0 \ . \ . \ . \ (5).$$

Or abbiamo, com' è noto dall' algebra,

$$BM'.BM = \frac{n^2+m^2q-a^2q}{K^2(a'^2+q)},$$

e

$$Bm'.Bm = \frac{n^2+m^2q-a^2q}{K'^2(a''^2+q)};$$

sicchè si avrà

$$BM \ . \ BM : Bm' \ . \ Bm =$$
$$K'^2(a''^2+q) : K^2(a'^2+q) \text{ (Geom. 169).}$$

400. Nel cerchio essendo rettangolare il sistema di due diametri conjugati, si ha $p=0$, ed allora l' equazione (1), sostituito in essa il valore di $n-y$ preso da (3) diverrà

$$z^2 = (1+a'^2)(m-x)^2;$$

quindi si avrà

$$K = \frac{1}{\sqrt{[1+a'^2]}},$$

e

$$K^2 = \frac{1}{1+a'^2};$$

dippiù essendo nel cerchio $q=1$, le quantità

$$K^2(a'^2+q), \ K'^2(a''^2+q),$$

diverranno rispettivamente

$$\frac{1+a'^2}{1+a'^2}=1\,;\ \frac{1+a''^2}{1+a''^2}=1\,;$$

e quindi si avrà

$$\frac{n^2+m^2q-a'^2q}{K^2(a'^2+q)}=n^2+m^2-a^2\,,$$

ed

$$\frac{n^2+m^2q-a^2q}{K'^2(a''^2+q)}=n^2+m^2-a^2\,,$$

Fig. 9 come abbiamo ritrovato al di sopra (109); e perciò saranno eguali que' rettangoli

$B'M' \,.\, BM$, $Bm' \,.\, Bm$.

Fig. 18 401. Ma poicchè nell' ellisse, e nell'iperbole vi sono infiniti sistemi di diametri conjugati obbliqui, dippiù per la prima si ha

$$q=\frac{b^2}{a^2}\,,$$

e per l' altra

$$q=-\frac{b^2}{a^2}\,,$$

ne segue, che in queste curve non sono eguali, come nel cerchio, i rettangoli delle seganti, e delle loro porzioni esterne; *ma hanno tra loro una ragione, che dipende dall' angolo, ch' esse seganti fanno coll' asse dell' ascisse.*

La stessa ragione avranno i prodotti di due corde che si segano, allorchè il punto B cade dentro la curva: infatti in questo secondo caso non vi è altro cambiamento se non che la quantità

$$n^2+m^2q\,,$$

diviene minore di a^2q; e quindi le frazioni

$$\frac{n^2+m^2q-a^2q}{K^2(a'^2+q)},\ \frac{n^2+m^2q-a^2q}{K'^2(a''^2+q)},$$

divenendo negative, le radici di quell' equazione si debbono prendere in parte opposta, come appunto accade, allorchè le rette si segano dentro la curva.

402. Supponiamo, che una di quelle corde BMM' divenga tangente, condizione che verrà soddisfatta, dall' equazione

$$a'n+mq=0,$$

mediante la quale le due radici dell' equazione (4) diverranno eguali; indicando allora con t il valore della z, si avrà

$$t^2=-\frac{n^2+m^2q-a^2q}{K^2(a'^2+q)},$$

e quindi si avrà

$$\frac{BN^2}{Bm.Bm'}=\frac{K'^2(a''^2+q)}{K^2(a'^2+q)}\ \text{(Geom. 169)},$$

e sarà facile l'osservare, che, se l' altra segante diviene parimente tangente, chiamandola t', si avrà

$$\frac{t^2}{t'^2}=\frac{K'^2(a''^2+q)}{K^2(a'^2+q)}.$$

S' intendano condotti due diametri rispettivamente paralleli a quelle seganti, e s' indichino con 2δ, $2\delta'$; considerati come due corde, che si bisegano al centro, si avrà

$$\frac{\delta^2}{\delta'^2}=\frac{4\delta^2}{4\delta'^2}=\frac{K'^2(a''^2+q)}{K^2(a'^2+q)}\ \ldots\ (6);$$

allora indicando le porzioni delle seganti con S, s, S'; s' rispettivamente ed i segmenti di due corde qualunque con C, c, C', c'; si avrà

$$\frac{S\ .\ s}{S'\ .\ s'}=\frac{C\ .\ c}{C'\ .\ c'}=\frac{S\ .\ s}{t'^2}=\frac{t^3}{t'^2}=\frac{4d^2}{4d^2}\ .\ .\ .\ (T).$$

Cioè *nell' ellisse e nell' iperbole i rettangoli delle seganti menate da un stesso punto, nelle loro rispettive porzioni esterne; quelli fatti da' segmenti di due corde, che si segano dentro la curva; il rettangolo di una segante nella porzione esterna al quadrato della tangente condotta alla curva dello stesso punto, da cui parte le segante, ed i quadrati di due tangenti menate da uno stesso punto sono fra loro come i quadrati de' diametri condotti parallelamente ad esse.*

403. Supponiamo che il sistema de' diametri sia rettangolare, e che siano eguali gli angoli, sotto cui le seganti, le corde, e le tangenti s' inclinano all' asse delle ascisse, si avrà allora

$$a''=a',$$

e quindi $K=K'$, e l' equazione (6) diverrà

$$\frac{4d^2}{4d'^2}=\frac{K'^2(a'^2+q)}{K'^2(a'^2+q)}=1,$$

per cui si avrà

$$4d^2=4d'^2,$$

e

$$2d=2d',$$

e l' equazione (T) ci darà

$S \cdot s = S' \cdot s'$; $C \cdot c = C' \cdot c'$; $t = t'$; ed avendo anche riguardo alla simmetria della curva, si avrà

$$S = S', \quad C = c',$$

e quindi

$$s = s', \quad c = c',$$

e ne tireremo le seguenti conseguenze.

1.° *I diametri, le tangenti, le seganti, e le corde, che s' inclinano egualmente all' asse delle ascisse, sono eguali tra loro.*

2.° *Se da un punto fuori dell' ellisse, e dell' iperbole si menino due tangenti egualmente inclinate all' asse delle ascisse, il quadrato di una tangente sarà eguale al quadrato dell' altra; e se due seganti s' inclinano egualmente all' asse dell' ascisse, saranno eguali i rettangoli di esse nelle loro porzioni esterne.*

3.° *I diametri paralleli alle tangenti eguali sono eguali fra di loro, ed all' opposto.*

404. Supponiamo ora inversamente che siano eguali due diametri, o due tangenti, o due corde ec., l' equazione

$$\frac{4d^2}{4d'^2} \text{ ec.} = \frac{K'^2(a''^2+q)}{K^2(a'^2+q)},$$

diverrà

$$1 = \frac{K'^2(a''^2+q)}{K^2(a'^2+q)},$$

da cui si tira

$$K^2a'^2+K^2q=K'^2a''^2+K'^2q\ ,$$

equazione, che resterà soddisfatta allorchè si suppone

$$a'=a''\ ,$$

e quindi

$$K=K'\ ,$$

cioè, allorchè gli angoli de' due diametri o tangenti, ec. coll' asse delle ascisse sono eguali, dal che ne conchiuderemo, che *nell' ellisse, e nell' iperbole i diametri, le tangenti, e le corde eguali s' inclinano egualmente all' asse dell' ascisse.*

405. Mettiamo nell' equazione

$$K^2a'^2+K^2q=K'^2a''^2+K'^2q\ ,$$

in luogo di K^2, e K'^2, i loro rispettivi valori

$$\frac{1}{1+a'^2}\ ,\ \frac{1}{1+a''^2}\ ,$$

si avrà, fattane la riduzione

$$a'^2-a''^2=q(a'^2-a''^2)\ ,$$

equazione, che non può aver luogo, se non si ha $q=1$, ossia

$$\frac{b}{a}=1\ ,$$

e quindi $b=a$, proprietà del cerchio: e questo c' indica che il solo cerchio è quella figura, nella quale sotto qualunque angolo s' inclinino i diametri all' asse delle ascisse, sono sempre eguali, e sono parimenti eguali tutt' i rettangoli fatti da' segmenti, e dalle corde, che s' inter-

segano, i quadrati delle tangenti, che si menano da uno stesso punto; i rettangoli delle seganti nelle loro porzioni esterne menate comunque da uno stesso punto, e 'l quadrato di una tangente al rettangolo della segante nella sua porzione esterna, condotta dallo stesso punto, da cui parte la tangente, il che è analogo a ciocchè si è dimostrato (109, 110).

406. Si sciolga l' equazione

$$z^2=2\frac{(a'n+mq)}{(a'^2+q)K}z-\frac{n^2+m^2q-a^2q}{K^2(a'^2+q)},$$

si avrà

$$z=\frac{a'n+mq}{(a'^2+q)K}\pm$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{a'n+mq}{(a'^2+q)K}\right)^2-\frac{n^2+m^2q-a^2q}{K^2(a'^2+q)}\right]};$$

Fig. 18

e prendendo la differenza di questi valori di z, si avrà

$$MM'=2\sqrt{\left[\left(\frac{a'n+mq}{(a'^2+q)K}\right)^2-\frac{n^2+m^2q-a^2q}{K^2(a'^2+q)}\right]}.$$

Con ciò possiamo facilmente risolvere il problema, *di determinare l'angolo, che una segante dee fare coll' asse delle ascisse, affinchè la porzione di essa intercetta tra due punti dell' ellisse o dell' iperbole sia eguale ad una grandezza data P*: cioè questo problema resterà sciolto, mediante l' equazione

$$P=2\sqrt{\left[\left(\frac{a'n+mq}{(a'^2+q)K}\right)^2-\frac{n^2+m^2q-a^2q}{K^2(a'^2+q)}\right]},$$

determinando il valore di a'. Il calcolo riuscirà

ancora più semplice se il punto B lo supponiamo situato sull' asse YY', giacchè allora, si avrà $n=0$.

407. Supponiamo, che nella parabola un punto H sia dato per mezzo delle sue coordinate AR, RH, che chiameremo m, n: meniamo dal punto H una segante $HA'M$, e chiamiamo x, y le coordinate AB; BA' ad un punto A', ove la segante incontra la parabola; si chiami z la distanza HA'; si meni HC parallela ad AB; rapportando per maggior semplicità tutto il sistema a delle coordinate rettangolari, e riflettendo che AR, perchè presa in parte opposta ad AB, dee prendersi con segno contrario a questa, si avrà

Fig. 39

$$z^2=(y-n)^2+(x-m)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

dippiù perchè le segante SM passa pe 'l dato punto (m,n), vi sarà luogo alla condizione

$$y-n=a(x-m) \quad . \quad . \quad . \quad (2):$$

eliminando y tra (1), e (2) si avrà

$$z^2=(a^2+1)(x-m)^2,$$

da cui si tira

$$x-m=\frac{z}{\sqrt{(a^2+1)}},$$

valore che sostituito in (2) da

$$y=\frac{az}{\sqrt{(a^2+1)}}+n:$$

facciasi

$$\frac{1}{\sqrt{(a^2+1)}}=A;$$

si avrà

$$x=Az+m\,,$$

ed

$$y=Aaz+n.$$

Questi valori di x, ed y si sostituiscano nell' equazione della parabola

$$y^2=px\,;$$

ordinando rispetto a z, si avrà

$$z^2+\frac{2an-p}{a^2A^2}z+\frac{n^2-pm}{a^2A^2}=0\ldots(3).$$

Questa equazione, essendo di 2.° grado ci dimostra come per le altre curve di 2.° grado, che una retta non può segare una parabola, che in due punti.

Ciò posto è noto per la teoria dell' equazioni, che l' ultimo termine è il prodotto di tutte le radici; quindi chiamando z', z'' le due radici di quest' equazione, sarà

$$z'z''=\frac{n^2-pm}{a^2A^2}\,;$$

restituendo ad A^2 il suo valore, si avrà

$$z'z''=\frac{n^2-pm}{\dfrac{a^2}{a^2+1}}=\frac{(n^2-pm)(a^2+1)}{a^2}\ldots(4)\,;$$

or si ha

$$a=\text{tang}(z,x)\,;$$

e quindi

$$\sqrt{(a^2+1)}=\text{seg}(z,x)\,;$$

dunque sostituendo questo valore in (4), si avrà

$$z'z''=\frac{(n^2-pm)\sec^2(z,x)}{\tan g^2(z,x)}=\frac{n^2-pm}{\operatorname{sen}^2(z,x)}.$$

Ciò posto, se dallo stesso punto H si meni un' altra segante, chiamando a' la tangente dell' angolo, ch' essa fa coll' asse delle ascisse, A' la quantità

$$\frac{[illegible]}{\sqrt{(a'^2+1)}};$$

ed y' una porzione della segante intercetta tra il punto H, e la curva, si avrà, come quì sopra

$$y'^2+\frac{2a'n-p}{a'^2A'^2}y'+\frac{n^2-pm}{a'^2A'^2}=0\ldots(5);$$

e quindi chiamando z''', e z'''' le radici di questa equazione sarà

$$z'''z''''=\frac{n^2-pm}{A'^2a'^2}=\frac{n^2-pm}{\operatorname{sen}^2(y',x)},$$

e si avrà per conseguenza

$$z'z'' : z'''z''''=\frac{1}{\operatorname{sen}^2(z,x)} : \frac{1}{\operatorname{sen}^2(y',x)},$$

e moltiplicando per p la seconda di queste due ragioni si avrà

$$z'z'' : z'''z''''=\frac{p}{\operatorname{sen}^2(z,x)} : \frac{p}{\operatorname{sen}^2(y',x)};$$

ma

$$\frac{p}{\operatorname{sen}^2(z,x)},\ \frac{p}{\operatorname{sen}^2(y',x)},$$

sono i rispettivi parametri de' diametri, cui appartengono le ordinate prese sulle z, ed y' (338).

Dunque se in una parabola si menino da un punto preso fuori di essa due o più seganti, i rettangoli delle intiere seganti nelle rispettive porzioni esterne saranno proporzionali a' parametri ad esse corrispondenti.

408. Se una di esse seganti SM diviene tangente, le due radici dell'equazione

$$z^2+\frac{2aA-p}{a^2A}z+\frac{n^2-pm}{a^2A^2}=0,$$

diverranno eguali, e la suddetta equazione diverrà per conseguenza

$$z^2+\frac{n^2-pm}{a^2A^2}=0,$$

com' è noto per la teoria dell' equazioni: allora il rettangolo

$$z'z''=\frac{n^2-pm}{\text{sen}^2(z,x)},$$

diverrà

$$z^2=\frac{n^2-pm}{\text{sen}^2(z,x)};$$

e quindi si conchiuderà, che *se s' incontrano una segante ed una tangente della parabola, il quadrato della tangente sarà al rettangolo della segante nella porzione esterno come il parametro corrispondente alla tangente è a quello corrispondente alla segante.*

E se ambidue le seganti diverranno tangenti, è chiaro, che *i quadrati di queste saranno ancora proporzionali a' parametri de' diametri corrispondenti.*

Fig. 42 409. Se il punto cade dentro la curva, come in O; allora, chiamando m, n le coordinate rettangolari a questo punto; ed x, y le altre, al punto C, ove una corda BC, che si mena da O incontra la curva, si avrà parimente, chiamando

$$OC,\ z,\ z^2=(m-x)^2+(y-n)^2,$$

ossia

$$z^2=(x-m)^2+(y-n)^2,$$

essendo

$$(m-x)^2=(x-m)^2;$$

quindi sostituendo in questa il valore di $y-n$ avuto dall' equazione

$$y-n=a(x-m),$$

e trovando i valori di x, ed y, con chiamare A l' espressione

$$\frac{1}{\sqrt{(1+a^2)}},$$

si avrà

$$x=Az+m,$$

ed

$$y=Aaz+n,$$

valori, che sostituiti nell' equazione della parabola ci danno similmente

$$z^2+\frac{2an-p}{a^2A}+\frac{n^2-pm}{a^2A^2}=0,$$

e quindi si avrà parimente

$$BO\ .\ OC=\frac{n^2-pm}{a^2A^2}=\frac{n^2-pm}{\text{sen}^2(z,x)},$$

e similmente dimostrando essere

$$BO \cdot OF = \frac{n^2 - pm}{\text{sen}^2(y',x)},$$

ove y' indica le FO, OF ne conchiuderemo ancora essere

$$BO \cdot OC : FO \cdot OE = \frac{p}{\text{sen}^2(z,x)} : \frac{p}{\text{sen}^2(y',x)};$$

cioè, *che se nella parabola si segano due corde, i prodotti de' segmenti saranno proporzionali a' parametri de' diametri, a' quali esse sono ordinate* (a).

Chiamiamo p' il parametro corrispondente ad una corda DK; sarà anche p' quello corrispondente ad un' altra corda BC parallela ad DK; indichiamo con p'' il parametro corrispondente ad un' altra corda AQ, che sega le due prime corde: si avrà

$$DH \cdot HK : AH \cdot HQ = p' : p''$$

$$Cm \cdot mB : Am \cdot mQ = p' : p'',$$

e quindi

$$DH \cdot HK : Cm \cdot mB = AH \cdot HQ : Am \cdot mQ.$$

Cioè, *se nella parabola due, o più corde, parallele sono segate da una terza, i prodotti de' segmenti fatti sulle prime saranno proporzionali a' prodotti de' segmenti, che si formano rispettivamente sulla corda segante.*

FINE.

(a) L'allievo Sig. Scarambone su questo stesso piano da me propostogli ha dimostrato questo teorema in un modo simile presso a poco a quello qui da noi adoprato.

INDICE

DELL'ANALISI A DUE COORDINATE.

contatto sono corda di un' altra ellisse; in cui il rapporto degli assi è identico a quello degli assi della prima ellisse. Lo stesso ha luogo nell' iperbole. 325 — 326

Nell' ellisse, e nell' iperbole, menati due diametri, e pe' vertici di essi le tangenti, se un diametro è parallelo alla tangente menata dal vertice dell' altro, l' altro diametro riuscirà benanche parallelo all' altra tangente, e tali diametri saranno perciò conjugati. 327

Nell' ellisse, a nell' iperbole i raggi vettori manate da' fuochi al punto di contatto fanno colla tangente dell' una, a l' altra parte angoli eguali. 328 — 331

Nella parabola l' angolo fatto dalla tangente col raggio vettore al punto di contatto, è eguale all' angolo, che colla tangente fa la parallela menata all' asse del punto di contatto. Questa verità è la stessa di quella dimostrata nell' ellisse, riflettendo, che nella parabola uno de' fuochi andandosi a perdere all' infinito, uno de' raggi vettori, menati al punto di contatto, diviene parallelo all' asse. 331 — 332

Nell' ellisse, e nell' iperbole il rettangolo di due raggi vettori menati ad un punto qualunque del suo perimetro è eguale al quadrato del semidiametro conjugato a quello, che passa per questo punto. 333 — 334

Una retta non taglia una curva a centro di primo genere, che in due punti. 335 — 336

Nell' ellisse, e nell' iperbole, i rettangoli delle seganti menate da uno stesso punto, nelle loro rispettive porzioni esterne; quelli fatti da' segmenti di due corde, che si segano dentro la curva; il rettangolo di una segante nella porzione esterna al quadrato della tangente condotta alla curva dallo stesso punto, da cui porto la segante, ed i quadrati di due tangenti menate da uno stesso punto, sono fra loro come i quadrati de' diametri condotti parallelamente ad esse. 336 — 340

I diametri, la tangenti, le seganti, e le corde, che s' inclinano egualmente all' asse delle ascisse, sono eguali tra loro. Se da un punto fuori dell' ellisse, e dell' iperbole si menino due tangenti egualmente inclinate all' asse delle ascisse, i loro quadrati saranno eguali, e se due seganti s' inclinano egualmente all' asse delle ascisse, saranno eguali i rettangoli di esse nelle loro porzioni esterne. I diametri paralleli alle tangenti eguali sono eguali fra loro, ed all' opposto. I diametri, le tangenti, e le corde eguali s' inclinano egualmente all' asse dalle ascisse. Modificazioni di queste formole pe 'l cerchio. 340 — 343

Determinare l' angolo, che dee fare coll' asse delle ascisse una seganta dell' ellisse, o dell' iperbole, affinchè, la porzione di essa intercetta tra la curva sia di una data grandezza. 343 — 344

Nella parabola se si menano da un punto preso fuori di essa due, o più seganti, i rettangoli delle intiere seganti nelle loro porzioni esterne saranno proporzionali a' parametri de' diametri corrispondente. E se s' incontrano una segante, ed una tangente della parabola, il quadrato della tangente sarà al rettangolo dell' intiera

segante nella porzione esterna come il parametro corrispondente alla tangente è a quello corrispondente alla segante ; ed i quadrati di due tangente saranno nella stessa proporzione , come anche i prodotti de' segmenti di due corde , che si segano dentro la parabola. 344 - 349

Se nella parabola due e più corde parallele sono segate da una terza , i prodotti de' segmenti fatti sulle prime saranno proporzionali a' prodotti de' segmenti , che si formano rispettivamente sulla corda segante. 349

Pag.	ERRORI	CORREZIONI
1 *v.* 25	Ideolgia	Ideologia
11 *v.* 20	$D'A$	DA
13	*Fig.* 15	*Fig.* 5
14 *v.* 8	$\frac{m+n}{am}$	$\frac{am}{m+n}$
29 *v.* 28	$\frac{\text{sen}(\epsilon, x)}{\text{sen}[(x,y),(\epsilon,x)]}$	$\frac{\text{sen}(\epsilon,x)}{\text{sen}[(x,y)-(\epsilon,x)]}$
35 *v.* 11	$\cos[(m',m),(n',n)]$	$\cos[(m'-m),(n'-n)]$
idem v. 13	$\cos[(m',n),(n'-n)]$	$\cos[(m'-n),(n'-n)]$
46 *v.* 28, e 29	e'l prodotto si sottragga dall'altra	e dal prodotto si sottragga l'altra
idem ult.	$\text{sen}[(y',x),(x',x)]$	$\text{sen}[(y',x)-(x',x)]$
47 *v.* 7, 13, e 15	$\text{sen}[(y';x),(x',x)]$	$\text{sen}[(y',x)-(x',x)]$
49 *v.*	$\text{sen}[(y',x),(x',x)]$	$\text{sen}[(y',x)-(x',x)]$
56 *v.* 17	B^2-4AB	B^2-4AC
idem v. 29	$y'-$	$y'=$
70 *v.* 15	$C+A\surd[$ ec.	$C+A=\surd[$ ec.
idem v. 31	$y=\text{sen}(x',x),x'$.ec.,	$y=\text{sen}(x',x)x'$ ec.
82 *v.* 8	$BD-2AF<0$	$BD-2AE<0$
85 *v.* 12	*Idem*	*Idem*
86 *not.*	B, e $\surd[(C-A)]$,	B^2 e $\surd[(C-A)]^2$
91 *ult.*	$\frac{C-A}{2C+A}$.	$\frac{C-A}{2(C+A)}$

Pag.		
92 *v.*18	Px'^2-Ry' ec.	Px'^2+Ry' ec.
96		*Tav.* IV *Fig.* 1
127	$y^2=a^2\frac{b^2}{\quad}(a^2-x^2)$	$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$
139 *v.*18	sen(x,x')– ec.	sen(x,x)= ec.
140 *not.v.*4	Sia *O* il	Sia *C* il
*idem v.*5	*PBC*	*PBB'*
141 *not.v.*6	I numeri 2 debbono essere esponen.	
142, e 145	Bisogna mettere gli apici ad y^2, x^2, ed xy.	
147	$\cos(x,y')=\frac{1}{\sqrt{(1+\tan g^2(x,y))}}$	$\cos(x,y')=\frac{1}{\sqrt{(1+\tan g^2(x,y'))}}$
157	le x, ed y	x', y'
169 *v. penult.*	$a'=b^2$	$a^2=b^2$
179 *v. ult.*, e 180 *v. primo*	la quantità $\frac{1}{2}$ deve essere esponente	
215 *v.*8	la differenza di due	la differenza de'quadrati di due
245 *v.*6	$\frac{CD-BE}{CD}$	$\frac{CD-BE}{CB}$
297 *v.*9	I numeri $\frac{1}{2}$ debbono essere esponenti	